स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ० प्र० राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

इलाहाबाद

MAEC-03 (N)

परिमाणात्मक गतिविधियाँ

प्रथम खण्ड : गणितीय विधियाँ

द्वितीय खण्ड : परिमाणात्मक विधियाँ -II

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद-211013

www.uprtouallahabad.org.in

MAEC-03-(N)
परिमाणात्मक विधियां

खण्ड - 1
गणितीय विधियां

इस खण्ड में पाठ्यक्रम की पहली 7 इकाईयाँ है। इसमें अर्थशास्त्र के विद्यार्थी के लिए उपयोगी समस्त गणितीय उपकरण विद्यमान हैं। जहां तक संभव हो पाया है सभी इकाइयों के प्रारूप में समानता रखने का प्रयास किया गया है। प्रारम्भ में उपयोगी सैद्धांतिक जानकारी दी गई है एवं बाद में अर्थशास्त्र के क्षेत्र में उसके उपयोग को भलिभांति समझाया गया है। प्रत्येक इकाई में सम्बन्धित सूत्रों के साथ-साथ उनके उदाहरण एवं अभ्यास के लिए प्रश्न एवं उनके उत्तर दिये गये हैं।

प्रथम इकाई में समुच्चय, सम्बन्ध एवं फलन की चर्चा की गई है। इसमें समुच्चों का अर्थ एवं संकेतन को स्पष्ट करने के बाद समुच्चयों की संक्रियाओं को समझाया गया है। समुच्चयों की विशेषताओं का वर्णन किया गया है। इकाई के भाग 1.5 में सम्बन्ध एवं फलनों की चर्चा की गई है। इस इकाई में सम्बन्ध एवं फलनों के अन्तर को स्पष्ट करने के बाद फलनों की विभिन्न किस्मों एवं भाग 1.6 में दो या अधिक स्वतंत्र चरों के फलन को समझाया गया है।

द्वितीय इकाई में आर्थिक सिद्धान्तों में फलन तथा रेखाचित्र की चर्चा की गई है। इसमें सात विभिन्न फलनों जैसे मांग फलन पूर्ति फलन, कुल आगम फलन, लागत फलन, उत्पादन फलन, उत्पादन सम्भावना फलन, उपयोगिता फलन आदि की चर्चा करने के पश्चात इनके रेखा चित्रों को स्पष्ट किया गया है। अन्त में राष्ट्रीय आय के निर्धारण को भी समझाया गया है।

इकाई तीन में सीमांत तथा निरन्तरता को स्पष्ट किया गया है। सीमांत एवं निरन्तरता के अर्थ को स्पष्ट करने के पश्चात् अनिरन्तरता अथवा असांतव्य की स्थिति को समझाया गया है। अन्तिम भाग में अवकलनीयता की धारणा को स्पष्ट किया गया है।

अवकलन एवं इसके निर्वचन का वर्णन इकाई चार में किया गया है। अवकलन का अर्थ बताने के बाद हमें करने के प्रमुख सूत्रों की उदाहरण सहित व्याख्या की गई है। अभ्यास के लिए इकाई के अन्त में कुछ प्रश्न दिये गये हैं। इकाई पाँच में गुणकीय अवकलन तथा लोच की माप को स्पष्ट किया गया है। लघुगुणकीय अवकलन के प्रमुख सूत्रों एवं इसके विभिन्न प्रकारों की चर्चा करने के साथ ही इनके आर्थिक उपयोगों को भी स्पष्ट किया गया है।

इकाई छः में आंशिक अवकलन तथा इसे ज्ञात करने के लिए काम में लिए जाने वाले, विभिन्न सूत्रों की चर्चा की गई है तथा इनके आर्थिक उपयोगों को प्रदर्शित किया गया है। समरूप फलन तथा ओयलर के प्रमेय का भी वर्णन इसमें किया गया है। मांग उत्पादन व कुल उत्पत्ति के क्षेत्रों में इसके आर्थिक प्रयोगों की व्याख्या भी की गई है।

इकाई सात में अवकलन के आर्थिक प्रयोग पर चर्चा की गई है। फलन के उच्चतम बिन्दु, न्यूनतम बिन्दु ज्ञात करने सम्बन्धी समस्याओं एवं अर्थशास्त्र में इनके उपयोग पर चर्चा भी कई इकाई में की जायेगी। लागत एवं लाभ फलनों में अवकलन के उपयोगों की चर्चा करने के बाद उन्हें रेखाचित्र बनाकर स्पष्ट किया गया है।

MAEC-03-N-1B

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

MAEC-03-(N)

परिमाणात्मक विधियां

खण्ड 1
गणितीय विधियां

पाठ्यक्रम विकास समिति

प्रोफेसर बी.एस. शर्मा (अध्यक्ष)
कुलपति,
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

प्रोफेसर एस.एस. आचार्य
निदेशक, विकास अध्ययन संस्थान (आई.डी.एस.)
जयपुर

डॉ. श्याम नाथ,
फेलो, एन.आई.पी.एफ.पी.
नई दिल्ली

डॉ. प्रमोद वर्मा
प्रोफेसर, इन्डियन इस्टीट्यूट ऑफ मैनेजमेन्ट
अहमदाबाद

डॉ. अमिताभ कुन्डू
निदेशक, गुजरात इन्स्टीट्यूट ऑफ डवलपमेन्ट रिसर्च
गोटा, अहमदाबाद

प्रोफेसर ए.के. सिंह
गिरि इन्स्टीट्यूट ऑफ डवलपमेन्ट स्टडीज
लखनऊ

निदेशक
दिल्ली स्कूल ऑफ इकोनोमिक्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रोफेसर डी.डी. नरूला
मानद वरिष्ठ अध्येता
विकास अध्ययन संस्थान, जयपुर

***डॉ. एम.के. घडोलिया**
सह आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

श्री आर.पी. शर्मा
सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

डॉ. जे.के. शर्मा
सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

डॉ. एल.एन. गुप्त, संयोजक
आचार्य एवं अध्यक्ष अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

*डॉ. एम.के. घडोलिया, (तत्कालीन अध्यक्ष) सह आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग ने 16.8.1996 तक इस पाठ्यक्रम का संयोजन किया।

पाठों के लेखक

डा. सी०एस० बरला
आचार्य एवं अध्यक्ष,
अर्थशास्त्र विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राजस्थान)

डा. एम.के. घड़ोलिया
सह-आचार्य, अर्थशास्त्र
कोटा खुला विश्वविद्यालय,
कोटा (राजस्थान)

डा. वी.सी. सिन्हा
आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
अवधेश प्रतापसिंह विश्वविद्यालय,
रीवा (म.प्र.)

डा. के.आर.जी. नायर
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
(दक्षिण परिसर) दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

सम्पादक

डा. जे.एम. जोशी
भूतपूर्व आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर, (राजस्थान)

भाषा सम्पादक

डा. एम.के. घड़ोलिया
सह-आचार्य अर्थशास्त्र
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

डा. जे.के. शर्मा
सहायक-आचार्य
अर्थशास्त्र, कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

अनुवाद

डा. एस.के. अग्रवाल
वरिष्ठ सहायक-आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
राजधानी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

डा. (श्रीमती) एस. मूर्ति
आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
विक्रम विश्वविद्यालय
उज्जैन (म.प्र.)

सामग्री उत्पादन

डॉ. ब्रजकिशोर शर्मा
निदेशक
पाठ्य सामग्री उत्पादन एवं वितरण
कोटा खुला विश्वविद्यालय
कोटा

कोटा खुला विश्वविद्यालय कोटा के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय इलाहाबाद की ओर से Mk-vkj-d-ik.M; कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित,2017
end % pUndyk ;fuoly ik0fy0] 42@7 tokgj yky ug: jkM] bykgkckn

इकाई 1

समुच्चय, सम्बन्ध व फलन

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- समुच्चयों का अर्थ एवं इसके संकेतन (Notations) को पहचान सकेंगे एवं उन पर कुछ संक्रि कर सकेंगे;
- सम्बन्ध एवं फलनों का अर्थ समझकर इसमें अन्तर कर सकेंगे;
- फलनों की विभिन्न किस्मों से परिचित हो जाएंगे; एवं
- दो या अधिक स्वतंत्र चरों के फलन को समझ सकेंगे।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

इस इकाई में हम समुच्चयों (sets) सम्बन्ध (relations) व फलनों (functions) के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे। वस्तुओं का एक ऐसा समूह जिसे किसी विशेष तरीके से संग्रहित किया गया है समुच्चय है। प्रस्तुत इकाई में हम समुच्चयों की संकल्पना (concept) को समझने के साथ-साथ इसके मध्य सम्बन्ध एवं उन पर की जाने वाली संक्रियाओं से भी परिचित हो जाएंगे।

अर्थशास्त्र में हमारे सम्मुख सैकड़ों ऐसे उदाहरण प्रस्तुत होते हैं जिसमें एक दूसरी क्रियाएं आपस में जुड़ी होती है-- जैसे वर्षा होने पर कृषि उत्पादन पर क्या असर पड़ेगा ? अथवा किसी वस्तु की कीमत बढ़ जाने पर मांग पर क्या प्रभाव पड़ेगा? इन दोनों ही दशाओं में हम दो सत्ताओं के बीच एक गणितीय सम्बन्ध ढूंढ़ते हैं। सम्बन्धों के इस अध्ययन में सहायक हो सकने के लिए ही फलन की संकल्पना का विकास हुआ है। इसकी विस्तृत चर्चा भाग 1.5 में की गई है।

1.2 समुच्चय का अर्थ एवं इसके संकेतन (Meaning of set and Notations)

आधुनिक गणित की प्रत्येक शाखा में समुच्चय की संकल्पना का प्रयोग होता है। एक समुच्चय केवल विशेष प्रकार की वस्तुओं का संग्रह होता है जिसकी सुनिश्चित व्याख्या की गई हो। एक समुच्चय में संख्याएं हो सकती हैं अथवा और कुछ भी हो सकता है; जैसे एक विशेष अर्थशास्त्र पढ़ने वाले समस्त छात्र एक समुच्चय में आ जाते हैं। इसी प्रकार तीन अंक जैसे 1, 2, 3 एक समुच्चय बना सकते हैं। एक समुच्चय में शामिल वस्तुएं (objects) उसके अवयव (elements) कहलाते हैं। एक समुच्चय को दो तरह से लिख सकते हैं--

प्रथम, गिनती के माध्यम से (enumeration) जैसे

$S = \{1, 2, 3\}$ और द्वितीय,

वर्णन करके (description) जैसे

$I = \{ x \mid x$ एक धनात्मक अंक है$\}$

दूसरे समुच्चय को इस प्रकार से पढ़ेंगे : ''I समुच्चय सभी x संस्थाओं का समुच्चय है, जहां x एक धनात्मक अंक होता है।'' स्मरण रहे कि एक समुच्चय को दोनों तरफ { } से घेरा जाता है। वर्णन करते समय अवयवों के सामान्य रूप व इनके वर्णन के बीच एक खड़ी रेखा या कोलन लगा दिया जाता है। ऊपर उदाहरण में खड़ी रेखा लगाई गई है।

यदि समुच्चय इस तरह है जैसे

$R = \{x \mid 3 < x < 7\}$ तो

यहां इसका अर्थ यह है कि इस सेट में उसे अधिक व 7 से कम सभी वास्तविक संख्याएं (real numbers) शामिल है। वास्तविक संख्याओं में धनात्मक व ऋणात्मक अंक, भिन्नें व अपरिमेय अंक (irrational numbers) जैसे $\sqrt{17}$ आदि शामिल होते हैं।

ऊपर समुच्चय S परिमित या सीमित समुच्चय (finite set) है, क्योंकि इसके अवयवों की गिनती हो सकती है, जबकि समुच्चय I एवं समुच्चय R अपरिमित समुच्चय (infinite set) हैं जिनमें गिनती हो सकती है--जैसे समुच्चय I में और नहीं भी हो सकती है जैसे समुच्चय R में।

एक सेट के अवयव (element) को ϵ चिन्ह से सूचित किया जाता है; जैसे ऊपर वर्णित समुच्चयों में अवयवों को इस तरह सूचित कर सकते है :

$2 \in S$ (2 अवयव है S समुच्चय का)

$5 \in I$ (5 अवयव है I समुच्चय का)

$4 \in R$ (4 अवयव है R समुच्चय का)

$\notin$ संकेत का अर्थ है कि यह अवयव नहीं है जैसे

$4 \notin S$ (4 अवयव नहीं है S समुच्चय का)

1.3 समुच्चयों में परस्पर सम्बन्ध (Relation between sets)

(i) दो समुच्चय परस्पर समान हो सकते हैं जैसे

$S = \{3, 8, b, d\}$ और $S_1 = \{8, b, 3, d\}$

इनमें अवयव समान होते हैं अवयव किस क्रम में लिखे गये है इससे कोई फर्क नहीं पड़ता है। अतः यहां

$S = S_1$ है।

(ii) एक समुच्चय दूसरे समुच्चय का उप समुच्चय (Sub set) हो सकता है, जैसे

$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$T = \{4, 8\}$

यहां पर T समुच्चय S समुच्चय का उप-समुच्चय है क्योंकि T के सभी अवयव S समुच्चय के भी सदस्य है। इसे इस प्रकार लिखा जाता है—

$T \subset S$ इसका अभिप्राय T समुच्चय S समुच्चय का उप समुच्चय है $T \subset S$ का अभिप्राय है T समुच्चय S समुच्चय का उपसमुच्चय नहीं है। स्मरण रहे $\subset$ का अभिप्राय में शामिल है (Is contained in) तथा $\supset$ का अभिप्राय शामिल रखता है (includes) होता है। एक शून्य या खाली समुच्चय सभी समुच्चयों में सम्मिलित होता है। यदि $T \subset S$ एवं $S \subset T$ हो तो इसका अर्थ होगा T समुच्चय एवं S समुच्चय बराबर है अर्थात् $T = S$ है।

(iii) शून्य समुच्चय अथवा खाली समुच्चय (Null set or Empty set)

शुन्य अथवा खाली समुच्चय में कोई अवयव नहीं होता इसके लिए $\varnothing$ अथवा $\{\ \}$ चिन्ह प्रयोग में लाए जाते हैं। स्मरण रहे $\{O\}$ को शून्य या खाली समुच्चय नहीं कहते है क्योंकि इसमें तो शून्य अवयव है अतः $\{\ \}$ को ही शून्य या खाली सेट कहा जाता है एवं यह प्रत्येक समुच्चय का सदस्य होता है।

अब यदि आप यह जानना चाहे कि $S = \{a, b, c\}$ के कितने उप-समुच्चय बन सकते हैं तो आप इन्हें इस प्रकार व्यक्त करेंगे :—

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\{ab\}$ $\{ac\}$ $\{bc\}$

$\{a,b,c\}$ एव $\{\ \}$

इस प्रकार तीन अवयवों वाले समुच्चय के 8 उप-समुच्चय अथवा 2^3 उप-समुच्चय बनते हैं। इनमें सबसे बड़ा समुच्चय स्वयं S समुच्चय एवं सबसे छोटा समुच्चय शून्य समुच्चय $\{\ \}$ है। इस प्रकार 4 अवयवों वाले समुच्चय के कुल 2^4 अथवा 16 उप-समुच्चय एवं n अवयवों वाले समुच्चय के 2^n उप-समुच्चय बनेंगे।

(iv) असंयुक्त समुच्चय (Disjoint set) यदि दो समुच्चयों के सभी अवयव एक दूसरे से बिलकुल भिन्न हो तो उन्हें असंयुक्त समुच्चय कहा जाता है।

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ एवं

$S_1 = \{-1, -2, -3, -4\}$

ये दोनों असंयुक्त समुच्चय हैं। क्योंकि S में घनात्मक संख्याएं है जबकि S_1 में सभी संस्थाएं ऋणात्मक है। जब दो समुच्चयों में कुछ अवयव मिलते जुलते हो एवं कुछ भिन्न हो तो ये न तो समान समुच्चय होते है नहीं असंयुक्त समुच्चय और नहीं इनमें एक समुच्चय को दूसरे का उप-समुच्चय कहा जाता है जैसे–

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_1 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

इनमें 1, 2 समान है बाकी भिन्न है

बोध प्रश्न 1. * इकाई के अन्त में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तर का मिलान करें।

(i) एक समुच्चय दूसरे समुच्चय का उप-समुच्चय कब माना जाता है?

(ii) $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ के कुल कितने उप-समुच्चय बनेंगे?

(iii) शून्य समुच्चय अथवा खाली समुच्चय की विशेषता बताइये।

(iv) असंयुक्त सेट किसे कहते है?

1.4 समुच्चयों की संक्रियाएं एवं उनके नियम

समुच्चयों पर निम्नांकित संक्रियाएं की जाती है :

(i) सम्मिलन (Union) चिह्न $\cup$

(ii) सर्वनिष्ठ (Intersection) चिह्न $\cap$

(iii) पूरक (Complement) चिह्न ~ अथवा ²

(i) सम्मिलन (Union) A एवं B समुच्चयों के सम्मिलन से जो नया सेट बनता है उसमें वे सभी अवयव होते है जो A समुच्चय और अथवा B समुच्चय में से किसी एक में भी होते हैं अथवा दोनों में होते हैं। इन्हें $A \cup B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है:

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ and/or } x \in B\}$

(ii) सर्वनिष्ठ (Intersection) - समुच्चय A तथा B का जोड़ सर्वनिष्ठ समुच्चय एक नया समुच्चय है जिसमें समुच्चय A एवं B दोनों में समान रूप से विद्यमान अवयव आते हैं। इसे $A \cap B$ से व्यक्त किया जाता है एवं इसका अभिप्राय:

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$

(iii) पूरक समुच्चय (Complement Set)- एक समुच्चय के पूरक को ज्ञात करने के लिए समष्टीय समुच्चय (universal set) से परिचित होना जरूरी है। समष्टीय समुच्चय में हमारे विवेचन से संबंधित अवयव सम्मिलित होते हैं। यदि दो समुच्चय A एवं B ऐसे हैं कि उनका सम्मिलन समष्टीय समुच्चय है एवं उनका सर्वनिष्ठ शून्य समुच्चय है तब समष्टीय समुच्चय के संदर्भ में एक समुच्चय दूसरे का पूरक

समुच्चय कहलाएगा। यदि U समुच्चय को समष्टीय समुच्चय कहा जाए एवं एक समुच्चय A के पूरक समुच्चय को A से व्यक्त किया जाये तो

$$A = U - A$$

उदाहरण

अब हम समुच्चयों पर उपर्युक्त वर्णित संक्रियाओं को उदाहरण द्वारा स्पष्ट करने का प्रयास करेंगे–

(1) $A = \{1, 4, 7, 8\}$ तथा $B = \{2, 3, 4, 5\}$ हो तो

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ होगा। प्रस्तुत उदाहरण में सम्मिलन की क्रिया को बताया गया है।

(2) उपर्युक्त उदाहरण मं

$$A \cap B = \{4\}$$

इसमें सर्वनिष्ठ की क्रिया को बताया गया है इसी प्रकार यदि $A = \{1, 2, 3\}$ एवं $B = \{-1, -2, -3\}$ हो तो

$A \cap B = \varnothing$ या $\{ \quad \}$ होगा क्योंकि A व B में कुछ भी कामन अवयव नहीं है।

(3) अगर एक यूनिवर्सल सेट

$$\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

एवं $A = \{1, 4, 6\}$ है तो

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$A = A$ का पूरक सेट इसके वे अवयव आते है जो u में हैं परनतु A में नहीं हैं।

$u = \varnothing$ होगा।

क्योंकि u में सभी अवयव होते है दूसरा पूरक u एक शून्य या खाली सेट ही हो सकता है।

समुच्चयों की संक्रियाओं से संबंधित नियम

(i) **क्रम विनिमय नियम**–जिस प्रकार बीजगणित में $a+b = b+a$ एवं $a \times b = b \times a$ होता है उसी प्रकार सम्मिलनों तथा सर्वनिष्ठों का क्रम विनिमय भी सत्य होता है: अर्थात्

$A \cup B = \quad B \cup A$

$A \cap B = \quad B \cap A$

(ii) **सहचरी नियम**—ये नियम भी बीजगणित की भांति लागू होते है अर्थात्:

$A \cup (B \cup C) = \quad (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = \quad (A \cap B) \cap C$

(iii) **बंटन नियम**

$A \cup (B \cap C) = \quad (A \cap B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = \quad (A \cup B) \cup (A \cap C)$

उदाहरण—

(i) $S_1 = \{2, 4, 6\}$ तथा $S_2 = \{7, 2, 6\}$

$S_1 \cup S_2 = \{2, 4, 6, 7\}$

$S_1 \cap S_2 = \{2, 6\}$

(ii) यदि $A = \{4, 5, 6\}$

$B = \{3, 4, 6, 7\}$

$C = \{2, 3, 6\}$

हो तो वितरणात्मक नियम अथवा वंटन नियम को सिद्ध कीजिए।

$A \cup \{B \cap C\}$	$= \{A \cup B\} \cap \{A \cup C\}$
$= \{4, 5, 6\} \cup \{3, 6\}$	$= \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$	$= \{3, 4, 5, 6\}$
बांयी तरफ	दाईं तरफ

नियम सिद्ध

इसी प्रकार

$A \cap \{B \cup C\}$	$= \{A \cap B\} \cup \{A \cap C\}$
$\{4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4, 6, 7\}$	$= \{4, 6\} \cup \{6\}$
$\{4, 6\}$	$= \{4, 6\}$
बांयी तरफ	दाईं तरफ

नियम सिद्ध

बोध प्रश्न 2

इकाई के अंत में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कर लें।

(1) निम्नांकित समुच्चयों में वितरणात्मक नियम सिद्ध कीजिए—

$A = \{5, 6\}$, $B = \{4, 7, 8\}$ एवं $C = \{3, 4\}$

(2) यदि $R = \{1, 2, 3\}$ $S = \{4, 5, 1\}$ एवं

$T = \{4, 5, 1, 2\}$ तथा यूनिवर्सल सेट

$u = \{4, 5, 1, 2, 3, 6\}$ हो तो

(i) $R \cap T \cap S$ ज्ञात कीजिए

{~ समुच्चय का पूरक}

(ii) $\{R \cup T\} \cup S$ ज्ञात कीजिए तथा उसका यूनिवर्सल सेट से संबंध लिखिए।

[संकेत $R = \{4, 5, 6\}$, $T = \{3, 6\}$ एवं $S = \{2, 3, 6\}$ है]

1.5 संबंध व फलन (Relations and Functions)

1.5.1 क्रमित युग्म या जोड़े (Ordered Pairs)

एक समुच्चय $\{a, b\}$ में क्रम का महत्त्व नहीं होता क्योंकि परिभाषा से $\{a, b\} = \{b, a\}$ होता है। इसलिए इसे बिना क्रम का युग्म या जोड़ा (unordered pair) कहते हैं। लेकिन जब क्रम का महत्त्व होता है तब $\{a, b\}$ और $\{b, a\}$ उसे भिन्न-भिन्न क्रमित युग्म या जोड़े (ordered pairs) होते हैं और ये एक दूसरे के बराबर नहीं होते (जब तक कि $a = b$ न हो)।

मान लीजिए, हम एक कक्षा में छात्रों की आयु व वजन को दर्शाना चाहते हैं और उसके लिए क्रमित युग्म (a, w) लेते हैं जहां a = आयु एवं w = वजन है यदि एक छात्र का युग्म $\{18, 120\}$ है तो इसका अर्थ है उसकी आयु 18 व वजन 120 पौंड है। इसलिए इसको $\{120, 18\}$ क्रम में रखने पर दूसरा अर्थ निकलेगा। यह युग्म गलत होगा क्योंकि आयु 120 वर्ष व वजन 18 पौंड भ्रमात्मक है।

हम जानते है कि एक ग्राफ पेपर पर दो बिंदु $(1, 2)$ एवं $(2, 1)$ एकदूसरे से भिन्न होते हैं। पहले बिुंदे से $x = 1$ एवं $y = 2$ है जबकि दूसरे बिंदु से $x = 2$ एवं $y = 1$ है।

हम दो दिए हुये समुच्चयों $x = \{2,3\}$ एवं $y = \{4,5\}$ से सभी संभव क्रमित युग्म या जोड़े (ordered pairs) बना राकते हैं। जिनका प्रथम अवयव x समुच्चय से होगा एवं द्वितीय अवयव y समुच्चय से होगा। ऐसे चार क्रमित युग्म इस प्रकार हो सकते हैं: $(2,4), (2,5), (3,4), (3,5)$। इनको कार्तीय गुणन (Cartesian product) अथवा प्रत्यक्ष गुणन कहते है।

इस प्रारंभिक विवेचन के बाद हम संबंधों व फलनों का अर्थ स्पष्ट कर सकते हैं।

1.5.2 संबंध व फलन का अर्थ व इनमें अंतर

(i) संबंध–क्रमित युग्मों में x का मान y के मान से जुड़ा होता है अर्थात इनमें आपस में संबंध होता है। x का मूल्य दिया हुआ होने पर y के एक या अधिक मूल्य व्यक्त किये जा सकते हैं। जैसे निम्नांकित समुच्चय में:

$$A = \{(x, y) | y \le x\}$$

x का मूल्य दिया हुआ है- $x = 1$ तब उपर्युक्त समुच्चय में क्रमित युग्म इस प्रकार हो सकते हैं: $(1, 0), (1,1), (1, -2)$। इन तीनों काल्पनिक मूल्यों में $y \le x$ की शर्त पूरी हो है। इस प्रकार x के एक मूल्य पर y के कई मूल्य हो सकते हैं।

(ii) फलन (Function)– की स्थिति के समुच्चय x तथा y के संबंध की एक विशिष्ट स्थिति को फलन की स्थिति (function) कहा जाता है जिसमें प्रत्येक x मूल्य के लिए एक ही y मूल्य होता है। जैसे समुच्चय $\{(x, y) | y = x\}$ में $x = 0$ पर $y = 0$ होगा; $x = 1$ पर $y = 1$ होगा तथा $x = -1$ पर $y = -1$ ही होगा अतः यहां y को x का फलन कहा जाता है और उसे $y = f(x)$ से सूचित करते हैं। और इसे $y = x$ के रूप में दर्शाया गया है।

अतः एक फलन क्रमित युग्मों का ऐसा समुच्चय होता है जहां x के किसी भी मूल्य पर y का एक अविकल्पित या विशिष्ट निर्धारित (uniquely determined) मूल्य ही होता है। इससे स्पष्ट होता है कि फलन एक विशेष किस्म का संबंध होता है जहां x के एक मूल्य पर y का एक विशेष मूल्य ही होता है लेकिन संबंध में x के एक मूल्य पर y के एक से अधिक मूल्य हो सकते हैं।

अतः एक फलन एक संबंध अवश्य होता है, लेकिन एक संबंध के लिए एक फलन होना आवश्यक नहीं होता। स्मरण रहे कि फलन की इस परिभाषा में x के प्रत्येक मूल्य पर y के लिए एक विशेष मूल्य ही होगा। लेकिन इसका उल्टा होना जरूरी नहीं माना जाता अर्थात् y के एक मूल्य पर x के एक से अधिक मूल्य हो सकते हैं।

फलन की यह परिभाषा पुरानी शब्दावली के अनुसार एक मूल्य वाले फलन (Single valued function) की परिभाषा के अनुरूप है। इसमें x के एक मूल्य पर y का एक ही मूल्य संभव होता है। इसका अर्थ यह है कि हम बहुमूल्य वाले फलन (Multi-valued function) को अब केवल संबंध ही कह सकते हैं इसमें x के एक दिए हुये मूल्य पर y के एक से अधिक मूल्ये हो सकते हैं। $y = f(x)$ फलन में x को फलन का कोणांक (argument) कहते है तथा y को फलन का मूल्य (Value of the function) कहा जाता है। x स्वतंत्र चर (independent variable) होता है और y आश्रित (dependent) चर होता है।

एक दी हुई स्थिति में x जो मूल्य ले सकता है उसे फलन का डोमेन (domain) कहते हैं। और उसके अनुरूप y जो मूल्य लेता है उसे फलन की परिधि या सीमा कहते हैं।

उदाहरण 1. मान लीजिए, एक फलन $y = 4 + 2x$ का डोमेन निम्नांकित समुच्चय से दर्शाया जाता है

$\{x | 1 \le x \le 4\}$

तो फल की परिधि को समुच्चय में दर्शाइये।

हलः—

फलन $y = 4 + 2x$

यदि $x = 1$ हो तो $y = 6$

यदि $x = 4$ हो तो $y = 12$

अतः फलन की परिधि 6 से 12 के बीच होगी जिसे समुच्चय रूप में

$\{y | 6 \le y \le 12\}$ लिखा जाएगा।

उदाहरण 2 एक फर्म की प्रतिदिन की लागत (c), उसकी प्रतिदिन की उत्पत्ति (Q), का फलन होती है। फर्म की अधिकतम क्षमता 200 इकाई प्रतिदिन है। लागत फलन $c = 100 + 5Q$ है तो लागत फलन का डोमेन एवं परिधि ज्ञात करें।

हलः— एक दिन में उत्पत्ति Q की मात्रा O से 200 इकाई हो सकती है अतः लागत फलन का डोमेन $= \{Q | O \le Q \le 200\}$ यदि $Q = 0$ है तो

$C = 100$

एवं $Q = 200$ है तो

$C = 1100$ इसलिए परिधि अथवा

Range $= \{C | 100 \le C \le 1100\}$ होगी।

बोध प्रश्न 3. इकाई के अंत में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान करें।

(i) यदि फलन $y = 4 + 5x$ का डोमेन

$\{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$ है तो फलन की परिणिक का समुच्चय लिखिए।

(ii) यदि फलन $y = -x^2$ के लिए डोमेन में भी गौर शून्य वास्तविक संख्याएं आती हों तो परिधि लिखिए।

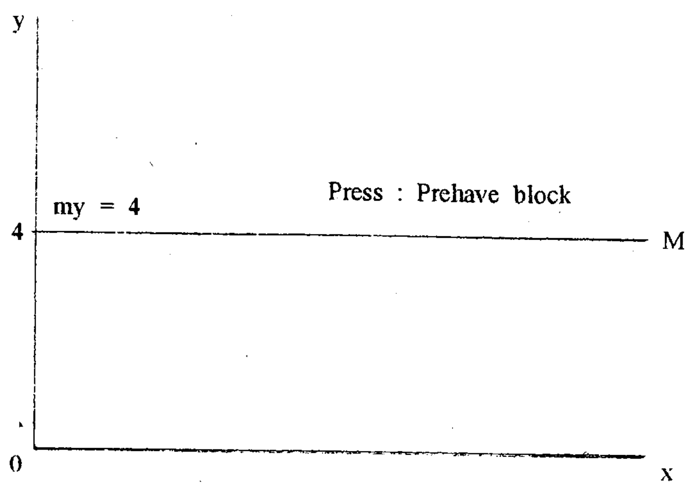
(iii) फलन व संबंध का अर्थ लिखिए।

(iv) एक फलन तो संबंध अवश्य होता है, लेकिन एक संबंध के लिए फलन होना जरूरी नहीं। स्पष्ट कीजिए।

1.5.3 फलनों की विभिन्न किस्में

$y = fx(x)$ तो फलन का एक सामान्य रूप होता है, लेकिन व्यवहार में फलनों के के कई अन्य स्वरूप हो सकते हैं। इनका परिचय यहां कराया जा रहा है।

(i) स्थिर फलन (constant function)– जिस फलन की परिधि में केवल एक अवयव आता है उसे स्थिर फलन कहा जाता है; जैसे $y = f(x) = 4$ इसे हम $y = 4$ अथवा $f(x) = 4$ भी लिख सकते हैं। ग्राफ पेपर पर यह एक सरल क्षतिज रेखा के रूप में दर्शाया जाता है। जैसा कि चित्र 1.2 में स्पष्ट है।



चित्र 1.2

चित्र 1.2 में MM सरल रेखा $y = 4$ फलन को दर्शाती है। इस प्रकार के फलन का उपयोग राष्ट्रीय आय के माडलों में किया जाता है। जहां सरकार अपनी इच्छा से, मान लीजिए 4 करोड़ रुपये का विनियोजन करने का निर्णय लेती है। इस विनियोग को स्वैच्छिक विनियोग कहा जाता है, क्योंकि इसकी मात्रा आमदनी के प्रत्येक स्तर पर समान रखी जाती है। स्मरण रहे कि $x = 7$ पर x अक्ष पर 7 इकाई पर एक लंबवत या खड़ी रेखा डालकर फलन का चित्र दर्शाया जाएगा।

(2) बहुपदीय फलन (Polynomial Functions)– बहुपदीलय फलनों में कई पद (terms) होते हैं। इसका सामान्य रूप नीचे दिया जाता है:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + anx^n$$

यहां $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ गुणांक (coefficients) हैं और n के अंकीय मूल्य के आधार पर बहुपदीय फलन का उपवर्ग स्पष्ट हो जाता है जैसे

$n = 0$, होने पर $y = a_0$ (स्थिर फलन)

$n = 1$, पर $y = a_0 + a_1x$ (रैखिक फलन)

$n = 2$, पर $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (द्विघाती या परवलीय फलन)

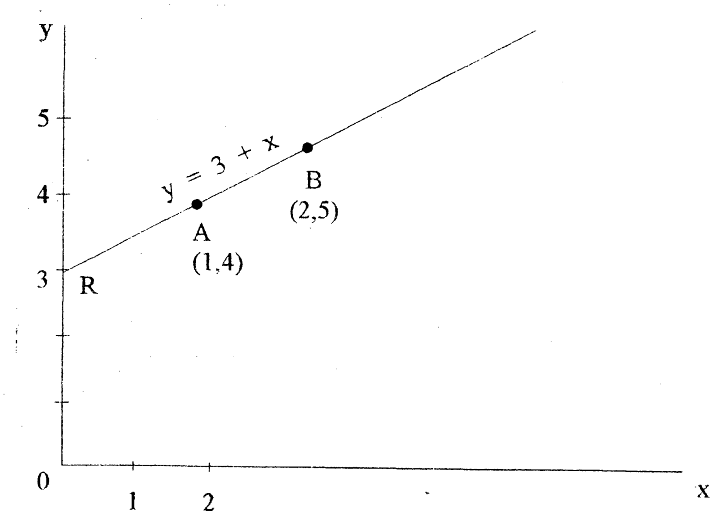
$n = 3$, पर $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (त्रिघाती फलन) आदि बनते हैं।

x पर लगने वाली पावर को घातांक (exponents) कहते हैं। स्मरण रहे कि स्थिर फलन में $y = a_0$ में वास्तव में $y = a_0x^2$ होता है, अर्थात् x पर पावर शून्य होती है जिससे $x^0 = 1$ होने पर $y = a_0$ रह जाता है। द्विघाती फलन दो डिग्री का 'पोलीनामियल' होता है। नीचे रैखिक, द्विघाती व त्रिघाती फलनों का चित्रों सहित स्पष्टीकरण दिया गया है ताकि आगे चलकर अर्थशास्त्र में इनका प्रयोग आसानी से समझ में आ सके।

(i) **रैखिक फलन (Linear function)**– इन फलनों को रेखाचित्र पर अंकित करने से सरल रेखाएं बनती हैं जैसे $y = 2x$, $y = -x$ आदि। यहां $y = 3 + x$ का ग्राफ खींचा गया है।

चूंकि इससे एक सरल रेखा बनती है, इसलिए ग्राफ पर दो बिंदु अंकित करके उनको मिला कर आगे-पीछे बढ़ाने से चित्र बन जाता है। जैसे $x = 1$ पर $y = 4$, तथा $x = 2$ पर $y = 5$ होता है।

अतः क्रमित युग्म (1, 4) व (2, 5) के बिंदु अंकित करने होंगे।



चित्र 1.3

चित्र 1.3 में A बिंदु (1, 4) व B बिंदु (2, 5) निर्देशांकों (coordinates) को सूचित करते हैं। उनको मिलाकर आगे-पीछे बढ़ाने से $y = 3 + x$ की सरल रेखा बन जाती है। क्षैतिज अक्ष पर x मापा गया है तथा उदग्र अक्ष पर y | OR अर्थात् $y = 3$ अंतः खंड (intercept) है जो $x = 0$ रखने पर फलन से प्राप्त होता है। रेखा का ढाल (slope) = 1 है जो x के गुणांक (coefficient) से निर्धारित होता है।

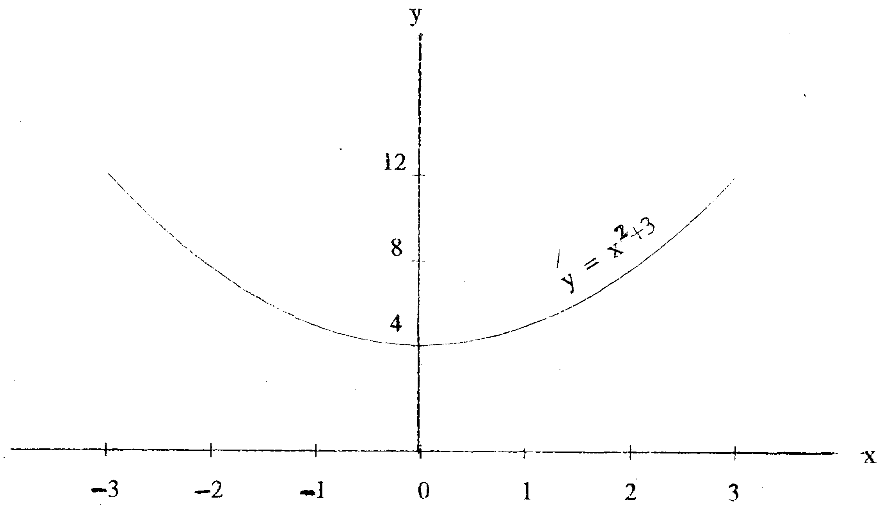
अतः सामान्य रूप में $y = ax + b$ फलन में रेखा का y अंतःखंड = b है और रेखा का ढाल =a है। स्मरण रहे कि a के शून्य होने पर यह स्थिर फलन बन जाएगा। प्रत्येक स्थिर फलन तो रैखिक होता है, लेकिन प्रत्येक रैखिक फलन स्थिर फलन नहीं होता।

(ii) द्विघाती फलन (Quardratic Function)– इसमें x पर पावर दो के बराबर (ज्यादा से ज्यादा) होती है। इसे परवलीय फलन (parabolic function) भी कहते हैं। जैसे $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + x + 1$, $y = x^2 - x$ आदि। इसे द्वितीय डिग्री का 'पोलीनोमियल भी कहा जाता है। इसका अर्थशास्त्र में बहुत उपयोग होता है, इसलिए इसका चित्र बनाना अवश्य आना चाहिए। इसका विशेषत्या लागत वक्रों में उपयोग देखा जाता है।

$y = x^2 + 3$ का ग्राफ बनाना है।

तालिका 1.1

x =	-3	-2	-1	0	1	2	3
y =	12	7	4	3	4	7	12



चित्र 1.4 द्विघाती का परवलीय फलन

चित्र 1.4 में x व y विभिन्न जोड़ों के बिंदुओं को मिलाने से $y = x^2 + 3$ का ग्राफ बन जाता है। चित्र 4 में $x = 0$ पर $y = 3$ है जो फलन का न्यूनतम बिंदु है। इस रेखाचित्र पर कोई अधिकतम मूल्य नहीं है। इसमें घाटी (valley) आती है। यदि $y = 3 - x^2$ का रेखाचित्र बनाते तो $x = 0$ पर $y = 3$ आता जो फलन का अधिकतम मूल्य होता। यहां फलन का कोई न्यूनतम बिंदु नहीं होता है। यहां फलन की पहाड़ी (hill) आती है।

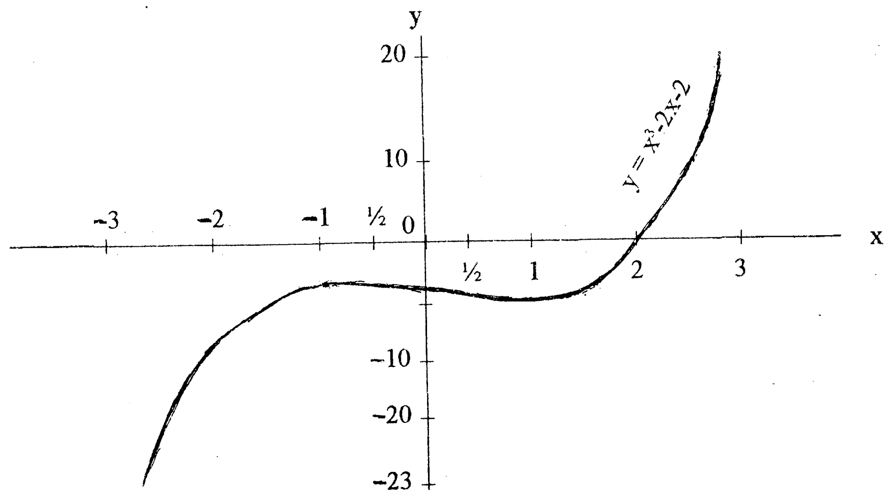
(iii) त्रिघाती फलन (Cubic Function)– इसमें x की अधिकतम पावर तीन होती है। इसलिए इसे तृतीय डिग्री का पोलीनोमियल कहा जाता है। $y = x^3$, $y = x^3 + x^2 + x + 1$, $y = x^3 - 2x - 2$, आदि त्रिघाती फलन के उदाहरण हैं।

नीचे $y = x^3 - 2x - 2$ का रेखाचित्र बनाया गया है।

तालिका 1.2

x =	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
Y =	-23	-6	-1	$-\frac{9}{8}$	-2	$-2\frac{7}{8}$	-3	2	19

यहां x के विभिन्न मूल्यों पर y के मूल्य निकाले गये हैं। इनको ग्राफ पर सुनिश्चित रूप से अंकित करने के लिए x के बहुत छोटे मूल्यों पर y के मूल्य निकालना चाहिए ताकि चित्र स्पष्ट आ सके।



चित्र 1.5 त्रिघाती फलन

x व y में विभिन्न जोड़ों कों अंकित करने पर और उनको मिलाने एक वक्र बनता है। इस वक्र पर दो मोड़ (turning points) आते हैं। वक्र x अक्ष तो x = लगभग 1.75 पर काटता हुआ ऊपर की ओर निकल जाता है। अतः x = 1.75 समीकरण का एक मूल (root) होता है। यदि वक्र x अक्ष को तीन बिंदुओं पर काटता तो समीकरण के तीन मूल ग्राफ पर ही देखे जा सकते थे। इस प्रकार त्रिघाती समीकरण का ग्राफ से हल देखना सुगम होता है; वैसे बीजगणित से हल करना काफी दुष्कर होता है।

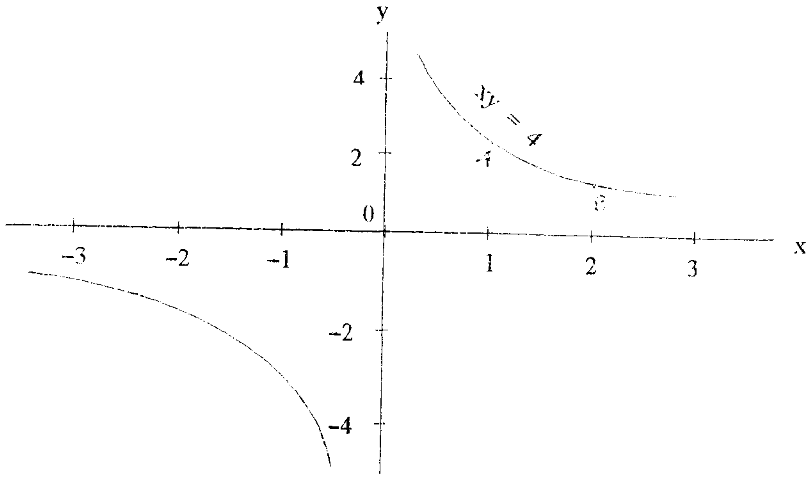
(3) परिमेय फलन (Rational Functions)- जब y को x चर में दो बहुपदीय फलनों के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है तो उसे परिमेय या रेशनल फलन कहते हैं।

$y = \frac{x}{x^2+1}$ एक परिमेय फलन है। इस परिभाषा के अनुसार स्वयं बहुपक्षीय फलन भी एक परिमेय फलन ही होता है, क्योंकि यह 1 के अनुपात में व्यक्त किया जा सकता है। अर्थशास्त्र में एक विशेष किस्म के परिमेय फलन का बहुत प्रयोग होता है। जैसे $y = \frac{4}{x}$ अपना xy = 4, अथवा सामान्य रूप में xy = a जहां a एक स्थिर राशि होती है। इसे आयताकार हाइपरबोला (अतिपरवलय) कहा जाता है।

यहां $y = \frac{4}{x}$ अथवा xy = 4 का ग्राफ खींचा गया है।

तालिका 1.3

x =	-3	-2	-1	0	1	2	3
y =	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	?	4	2	$\frac{4}{3}$



चित्र 1.6 आयताकार अतिपरवलय

स्पष्टीकरणः— x व y के विभिन्न जोड़ों को रेखाचित्र पर अंकित करके उनको मिलाकर वक्र खींचने से दो वक्र बनते हैं जो आमने-सामने होते हैं। इनमें धनात्मक मूल्यों वाला वक्र प्रथम खण्ड में आता है जिसका अर्थशास्त्र में विशेष महत्त्व होता है। ऋणात्मक मूल्यों वाले वक्र का व्यवहार में उपयोग नहीं होता। वैसे यह तृतीय खण्ड में आता है।

प्रथम खण्ड में खींचे गये आयताकार हाइपरबोला के प्रत्येक बिन्दु पर $xy = 4$ होगा (x दूरी xy दूरी सदैव 4 के बराबर बनी रहेगी)। चित्र में A पर $(1 \times 4) = 4$ है तथा B पर $(2 \times 2) = 4$ है। अर्थशास्त्र में ऐसा प्रायः उस मांग वक्र पर होता है जिस पर मांग की लोच सर्वत्र एक के बराबर होती है। औसत स्थिर लागत वक्र A Fc) भी आयताकार हाइपरबोला होता है। इन पर अधिक विस्तार से यूनिट 3 में लिखा गया है। यहां मुख्य उद्देश्य इस फलन या वक्र की प्रकृति से परिचय प्राप्त करना है।

स्मरण रहे कि आयातकार हाइपरबोला x-अक्ष व y-अक्ष से छूता नहीं, यह उनके समीप जाता है। $x = 0$ पर $y = \frac{4}{0}$ होता है जो अनिर्णीत (indeterminate) होता है। तालिका में इसे प्रश्नवाचक चिह्न (?) से दर्शाया गया है। इसे प्रायः अनंत (∞) भी लिखा जाता है। $x = \infty$ पर $y = \frac{4}{\infty}$ शून्य की ओर, लेकिन शून्य नहीं। इस प्रकार x के बहुत छोटा होने पर यह वक्र y-अक्ष के समीप आता है, और x के बहुत बड़ा होने पर यह x-अक्ष के समीप आता है, और x के बहुत बड़ा होने पर यह x-अक्ष के समीप आता है। x-अक्ष व y-अक्ष आयताकार हाइपरबोला के उपगामी (asymptotes) होते हैं।

(4) गैर बीजगणितीय (बीजातीत) फलन (Nonalgebraic function or transcendental functions)

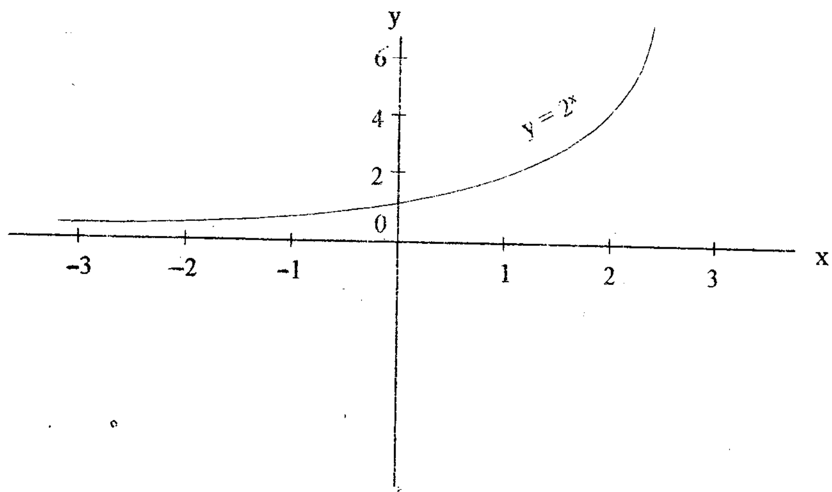
(i) चरघातांकीय फलन (exponential functions)—अभी तक हमने बीजगणितीय फलनों का वर्णन किया है। इनमें पोलीनोमियलों (बहुपदों) का उपयोग होता है। अब हम गैर-बीजगणितीय फलनों का स्पष्टीकरण करते हैं जिनका अर्थशास्त्र में काफी प्रयोग होता है।

$y = a^x$, अथवा $y = 2^x$ एक चरघातांकीय फलन है। इसमें आधार (base) स्थिर होता है और पावर में x या चर (variable) होता है। अतः पावर का मूल्य परिवर्तनशील होता है।

$y = 2^x$ का ग्राफ बनाने के लिए निम्न तालिका का प्रयोग किया जायगा—

तालिका 1.4

x =	-3	-2	-1	0	1	2	3
y =	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



चित्र 1.7 - चरघातांकीय फलन $y = 2^x$

चित्र 1.7 को देखने से चरघातांकीय फलन की विशेषता एक दम स्पष्ट हो जाती है। यह तेज रफ्तार से बढ़ता है जिससे विकास की दशाओं की चित्रित करने में इसका व्यापक प्रयोग किया जाता है। स्तरण रहे कि $X = 0$ पर $Y = 2^0 = 1$ होता है, और $X = -1$ पर $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ होता है। अतः वक्र बनाने के लिए घातांकों (indices) के नियमों की पर्याप्त जानकारी होनी चाहिए। प्रमुख नियम इस प्रकार होते हैं $x^{-m} = \frac{1}{m}$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$ $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$ तथा $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, आदि। ध्यान रहे कि $y = 2^{x+4}+4$, $y = {}^{2-x+y}-2$ आदि भी चरघातांकीय फलन ही कहलाते हैं।

चित्र 1.7 में वक्र y-अक्ष को $y = 1$ पर काटता हुआ आगे निकल जाता है। x के ऋणात्मक मूल्यों पर y के धनात्मक मूल्य होते हैं जिनको ध्यानन से अंकित किया जाना चाहिए क्योंकि वे छोटी-छोटी भिन्नों के रुप में दिये गये हैं।

(ii) लघुगणकीय फलन (Logarithmic function)—गैर-बीजगणितीय फलनों में दूसरा स्थान लघुगणकीय फलनों का होता है। इसके लिए लघुगणकों की विस्तृत जानकारी आवश्यक होती है। यहां लघुगणक का अर्थ सरल रूप में समझ लेना चाहिए। हम जानते हैं कि $10^0 = 1$ होता है, अतः हम कह सकते हैं कि 1 का लघुगणक 10 के आधार पर = 0 है। इसी प्रकार 10 = 10 होता है। अतः 10 का लघुगणक 10 के आधार पर 1 है। इस प्रकार किसी संस्था का लघुगणक वह अंक होता है जिसे 10 पर लगाकर हल करने से स्वयं वहीं संख्या निकल आती है।

लघुगणको में Characteristic व mantissa निकालने का अभ्यास होना चाहिए तथा लॉग व एन्टी-लॉग लेना आना चाहिए। उस पूर्व ज्ञान का उपयोग करने पर लघुगणकीय फलन, का रेखाचित्र बनाया जा सकता है।

यहां हम $y = \log_{10}^{x}$ का ग्राफ नमूने के तौर पर बनाकर इसकी विशेषता पर ध्यान केन्द्रित करेंगे।

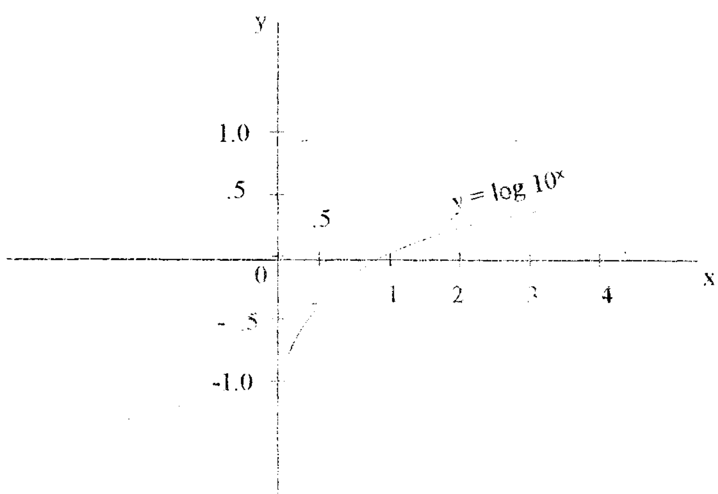
तालिका 1.5

x =	.25 $= \frac{1}{4}$	.50 $= \frac{1}{2}$	.57 $= \frac{3}{4}$	1	2	3	4
y =	-.6021	=.3010	-.1249	0	.3010	.4771	.6021
y = लगभग	-.6	-.3	-.1	0	3	.5	.6

गणना :– $\log_{10}.25 = \bar{1}.3979 = -.6021$

$\log_{10}.50 = \bar{1}.6990 = -.3010$, आदि।

हम 1, 2, 3 के लॉग सीधे-तालिका से पढ़कर लिख सकते है। x के ऋणात्मक मूल्यों के लिए y नहीं निकाला गया है क्योंकि ऋणात्मक संख्याओं के लघुगणंक नहीं होते। इसलिए ग्राफ के लिए केवल खाने I व IV का ही उपयोग होगा।



चित्र 1.8 लघुगणकीय फलन

स्पष्टीकरण :– चित्र 1.8 में x व y के तालिका के विभिन्न जोड़ों को अंकित करके एक वक्र बनाया गया है। यह धीरे-धीरे ऊपर की ओर जाता है। वक्र x-अक्ष को x=1 पर काटता है। इसका कारण यह है कि x = 1 पर y = 0 होता है। x के अन्य मूल्यों, जैसे $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ पर y के मूल्य ऋणात्मक होने से चौथे खण्ड में से वक्र जायेगा।

(iii) लघुगणक रेखिक फलन (log-linear function)—आजकल लॉग-लीनियर फलन का भी उपयोग होने लगा है। $y = ax^b$ एक पावर-फलन है। लघुगणकीय ग्राफ पर यह एक सरल रेखा के रूप में दर्शाया जा सकता है। दोनों तरफ से इसके लॉग लेने पर

log y = log a + b log x (लॉग नियम लगाने पर)

यहां log y का log x से रेखिक सम्बन्ध होगा।

यहां रेखा का अन्तःखण्ड = log a तथा ढाल = b होगा। ग्राफ में x-अक्ष पर log x तथा y-अक्ष पर log y अंकित किये जायेंगे। इस प्रकार दोनों अक्षों पर x o y अंकित न करके log x व log y अंकित किये जाते हैं।

अब हम $y = 2x^2$ का लॉग-लीनियर रूप लेकर ग्राफ बनाते हैं।

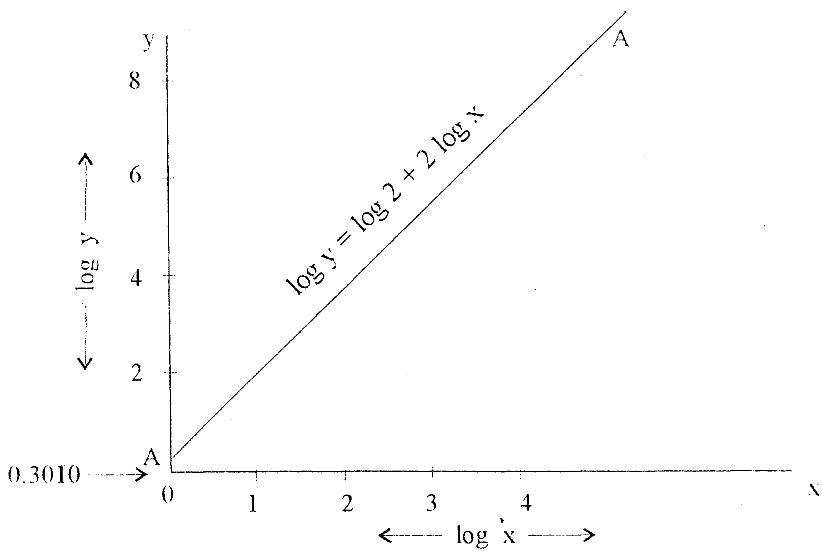
$y = 2x^2$ एक द्विघाती फलन (quadratic function) है। लॉग-रूप में यह—

log y = log 2 + 2 log x बनेगा।

तालिका 1.6

log x =	0	1	2	3	4
log y =	log 2	log 2 + 2	log 2 + 4	log 1 + 6	log 2 + 8
अथवा					
log y =	0.3010	2.3010	4.3010	6.3010	8.3010

यहां log 2 = 0.3010 रखा गया है।



चित्र 1.9 लघुगणकीय रेखीय फलन

स्पष्टीकरण :— चित्र 1.9 में x-अक्ष पर log x तथा y-अक्ष पर log y मापे गये हैं। तालिका के log x व log y के मूल्यों को अंकित करने से जाता है। तथा विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने से एक सरल रेखा A A बनती है। स्मरण रहे कि रेखा y-अक्ष पर log y = 0.3010 से प्रारम्भ होती है जो इसका y अन्तः खण्ड (y intercept) माना जाता है।

अतः इस रेखा का अतः खण्ड log 2 है तथा दाल = 2 है। स्मरण रहे कि x-अक्ष पर x नहीं बल्कि log x मापा गया है। इसी प्रकार y-अक्ष पर y नहीं बल्कि log y मापा गया है। इस प्रकार दोनों अक्षों पर logarithms (अथवा log) मापे जाने से तथा सरल रेखा के बनने पर यह log linear फलन का वक्र माना जाता है।

1.6 दो अथवा अधिक स्वतंत्र चरों के फलन

अन्त में हम दो चरों या अधिक स्वतंत्र चरों के फलनों को ले सकते हैं जैसे $2 = ax + by$ में z आश्रित चर x तथा y का फलन है।

अर्थशास्त्र में इन फलनों का काफी उपयोग होता है जैसे उत्पादन की मात्रा (Q) उत्पादन के साधनों पूंजी (k) एवं श्रम (L) पर निर्भर होती है : $Q = f(k, L)$

व्यवहार में ये भी रेखिये, द्विघाती आदि रूप ले सकते हैं।

बोध प्रश्न 4. इकाई के अन्त में दिय गये उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान करें।

(i) निम्नलिखित फलनों के चित्र बनाइये।

(a) $y = x + 2$

(b) $y = 3^x$

(c) $y = 3^{x2}$ (द्विघाती एवं लॉग रैखिक रूपों में)

(d) $y = 3^{x3} + 4$

(ii) निम्नांकित फलनों को पहचानिए–

(a) $C = -5 + 7Q$

(b) $C = 7 + .5Q + .3Q^2 - 0.8Q^3$

(c) $xy = 20$

(d) $y = 4x^5$

1.7 सारांश

इस इकाई में हमने समुच्चयों को एक विशेष प्रकार की वस्तुओं के संग्रह के रूप में परिभाषित किया—ऐसा समूह जिसकी सुनिश्चित व्याख्या की गई हो। समुंच्चयों पर सम्मिलन, सर्वनिष्ठ, एवं पूरक ज्ञान करने के लिए क्रियाए की गई। सम्बन्ध एवं फलन का अर्थ स्पष्ट करने के बाद आपको फलनों के विभिन्न रूपों की जानकारी भी दी गई। इन सभी प्रकार के फलनों के रेखाचित्र बनाकर इन्हें स्पष्ट किया गया।

1.8 शब्दावली

समुच्चय	(Set)
फलन	(Function)
अवयव	(element)
रिक्त या खाली समुच्चय	(Empty set)
उप-समुचय	(Sub-set)
सम्मिलन	(Union)
सर्वनिष्ठ	(Intersection)
पूरक	(Complement)
रैखिक फलन	(Linear function)
परवलय	(Parabola)
द्विघातीफलन	(Quadratic function)
त्रिघाती फलन	(Cubic function)

1.9 विविध प्रश्न

प्रश्न 1. यदि युनिवर्सल समुच्चय :

$\mu = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ हो तथा

$A = \{4, 5\}$ हो तो A का पूरक $(\overline{A})$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2. समुच्चयों का वितरणात्मक नियम सिद्ध कीजिए।

$A = \{d, e\}$

$B = \{C, f, g\}$

$S = \{b, c\}$

प्रश्न 3. निम्नांकित को फलन क्यों नहीं कह सकते ?

समच्चय $\{(x, y) \mid y \le 2x\}$

प्रश्न 4. यदि x के दो मूल्यों पर y का एक ही मूल्य प्राप्त हो तो उसे सम्बन्ध मानेंगे या फलन या दोनों।

प्रश्न 5. (i) डोमेन व परिधि की धारणाएं स्पष्ट कीजिए।

(ii) $y = 8 + 4x$ तथा $y = 8 - 4x$ में फलनों की दृष्टि से क्या अन्तर है।

(iii) यदि $y = x^2 + 5x - 2$ हो इसका डोमेन $-5 \le x \le 5$ हो तो परिधि ज्ञात करो।

(iv) यदि $y = \frac{6}{x}$ है तो x व y के घनात्मक होने पर वक्र किस खण्ड में होगा एवं x के ऋणात्मक होने पर किस खण्ड में आएगा। इस फलन का नाम बताइये।

(x) $y = x^3$ का रेखाचित्र बनाइये।

1.10 प्रश्नों के उत्तर (Answers to Questions)

बोध प्रश्न 1.

(i) जब एक उपसेट के सारे अवयव एक सेट में विद्यमान होते हैं।

जैसे $S_1 = \{1, 2, 3\}$ व $S_2 = \{1\}$ हो तो S_2 सेट S_1 का उपसेट है।

(ii) $2^6 = 64$ उपसेट

(iii) शून्य सेट में कोई अवयव नहीं होता, यह प्रत्येक सेट का सबसे छोटा उपसेट माना जाता है।

(iv) जब दो सेटों के अवय एक-दूसरे से बिल्कुल भिन्न होते हैं तो उनको असंयुक्त सेट कहते हैं।

बोध प्रश्न 2

(1) वितरणात्मक नियम का प्रथम भाग $= \{4, 5, 6\}$

" " द्वितीय भाग $= \emptyset = \{\ \}$ शून्य या खाली सेट।

(2) (i) $= \{6\}$

(ii) $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ यह यूनिवर्सल सेट का एक उपसेट है।

बोध प्रश्न 3

(i) परिधि (range) का सेट $= \left\langle \frac{y}{14} \le y \le 29 \right\rangle$

(ii) 0 से (-) ∞ परिधि होगी।

(iii) फलन में x के एक मूल्य पर y का एक विशिष्ट मूल्य ही होता है; जबकि y और x के सम्बन्ध में x के एक मूल्य पर y के एक से अधिक मूल्य हो सकते हैं।

सभी फलन सम्बन्ध अवश्य होते हैं, लेकिन सभी सम्बन्ध फलन नहीं होते।

बोध प्रश्न 4

(i) (a) सरल रेखा

(b) चरघातांकीय वक्र

(c) x व y अक्षों पर द्विघाती या परवलय वक्र बनेगा, एवं log x व log y अंकित करने पर लॉग-लीनियर या सरल रेखा बनेगा।

(d) त्रिघाती फलन (इसे भी लॉग-लीनियर बनाया जा सकता है)

(ii) (a) रैखिक फलन

(b) त्रिघाती (Cubic) फलन,

(c) आयताकार हाइपरबोला,

(d) पंचम-डिग्री पोलीनोमियल, अथवा लॉग-लीनियर में $\log y = \log 4 + 5 \log x$ होगा।

विविध प्रश्न–

(1) $\bar{A} = \{6, 7, 8, 9\}$

(2) (i) नियम का प्रथम भाग = { } या ∅ का शून्य सेट

(3) चूंकि x = 1 पर, y = 0, 1 व 2 आदि मूल्य ले सकता है जिससे यह सम्बन्ध (relation) की स्थिति तो बतलाता है, लेकिन फलन की नहीं जहां x के एक दिये हुए मूल्य पर y का एक विशिष्ट (Unique) मूल्य ही हो सकता है।

(4) फलन, लेकिन फलन में सम्बन्ध की अवधारणा तो निहित होती है, इसलिए यह फलन व सम्बन्ध दोनों है।

(5) (i) डोमेन में x के द्वारा लिये जाने वाले मूल्य आते हैं, जबकि परिधि में फलन या y द्वारा लिये जा सकने वाले मूल्य आते हैं।

(ii) पहले का ढाल = 4 है और दूसरे का -4 है।

(iii) परिधि (range) = $-2 \le y \le 48$ होगी।

(iv) x का मूल्य धनात्मक होने पर वक्र प्रथम खण्ड में व ऋणात्मक होने पर तृतीय खण्ड में आयेगा। यह आयताकार हाइपरबोला है।

(v) इसका ग्राफ त्रिघाती फलन का ग्राफ होगा।

२६

1.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

(1) Alpha C. Chiang, Fundemental Methods of Mathematical Economics, 3rd Edition; 1984 Chapter 2.

(2) R.G.D. Allen, Basic Mathematics, 1968, Chapter 4 and Chapter 7

(3) J.D. Gupta, P.K. Gupta and Man Mohan, Mathematics for Business and Economics, (Tata McGra-Hill), 1987, Chapter 1.

इकाई 2

आर्थिक सिद्धान्त में फलन तथा रेखाचित्र

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 मांग-फलन, पूर्ति-फलन, व संतुलन-कीमत तथा संतुलन उत्पत्ति एवं वक्र

2.3 कुल-आगम फलन, सीमान्त आगम फलन व औसत आगम फलन एवं वक्र

2.4 लागत-फलन एवं वक्र - कुल लागत, सीमान्त लागत एवं औसत लागत

2.5 उत्पादन फलन एवं वक्र - कुल उत्पत्ति, सीमान्त उत्पत्ति एवं औसत उत्पत्ति

2.6 उत्पादन सम्भावना वक्र एवं फलन

2.7 उपयोगिता फलन-गणनावाचक रूप तथा क्रमवाचक रूप में तटस्थता-वक्र व उनके फलनों की किस्में

2.8 राष्ट्रीय आय का निर्धारण-उपयोग फलन, विनियोग, सरकारी व्यय तथा संतुलन आय

2.9 सारांश

2.10 शब्दावली

2.11 विविध प्रश्न

2.12 प्रश्नों के उत्तर

2.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

2.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप :

- व्यष्टि अर्थशास्त्र के क्षेत्र में उपयोगी विभिन्न फलनों एवं रेखाचित्रों की प्रकृति से परिचित हो जाएंगे;
- जान सकेंगे कि कुल, सीमान्त एवं औसत फलन कैसे प्राप्त किए जाते है; एवं
- समष्टि अर्थशास्त्र के क्षेत्र में उपयोग-फलन, विनियोग फलन एवं बचत फलन एवं इनके रेखाचित्रों से परिचित हो जाएंगे।

2.1 प्र वना (Introduction)

अर्थशास्त्र में विभिन्न प्रकार के चरों (variables) का प्रयोग किया जाता है जैसे कीमतें, मांग की मात्राएं, पूर्ति की मात्राएं, उत्पादन के साधनों की मात्राएं तथा उत्पत्ति की मात्राएं, राष्ट्रीय आय, उपभोग, बचत, विनियोग, आदि। आवश्यकतानुसार विभिन्न विवेचनों में विभिन्न चरों के बीच परस्पर सम्बन्ध स्थापित किये जाते हैं; जैसे एक वस्तु की कीमतों व उसकी मांग की मात्राओं में सम्बन्ध बतलाया जाता है जिसे

मांग-फलन कहते हैं और उसको रेखाचित्र पर दर्शाने से मांग-वक्र बनता है। इसी तरह उत्पादन के साधनों की कीमतों (जैसे लगान, ब्याज, मजदूरी आदि) के बीच सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है **जिससे** साधन-मांग-फलन/वक्र बनते हैं। अतः अर्थशास्त्र में अनेक प्रकार के फलनों व रेखाचित्रों का प्रयोग देखने को मिलता है जिससे आर्थिक सिद्धान्तों को समझने में मदद मिलती है।

स्मरण रहे कि कई फलनों के तीनों रूप पाये जाते हैं—कुल, औसत व सीमान्त। जैसे कुल उत्पत्ति, औसत उत्पत्ति व सीमान्त उत्पत्ति और इसी प्रकार आय (total revenue), औसत आय व सीमान्त आय तथा कुछ लागत, औसत लागत वे सीमान्त लागत। इनका आर्थिक सिद्धान्त में अपना विशेष लगत। इनका आर्थिक सिद्धान्त में अपना विशेष महत्व होता है। यह ध्यान देने की बात है कि इनमें से किसी भी एक के लिए कुल फलन के दिये होने पर औसत फलन व सीमान्त फलन ज्ञात किया जा सकता है; अथवा औसत या सीमान्त फलन के दिये होने पर उससे सम्बन्धित शेष फलन ज्ञात किये जा सकते हैं। प्रायः औसत फलन पर जाने के लिए। कुछ फलन में कुल मात्रा का भाग देते हैं; जैसे कुल लागत में वस्तु की कुल उत्पत्ति की मात्रा का भाग देने से औसत लागत ज्ञात हो जाती है। सीमान्त फलन निकालने के लिए कुल फलन का प्रथम अवकलज (First derivative) लिया जाता है जिसका ज्ञान अवकलन के अध्ययन के बाद हो पायेगा। लेकिन हम यहां पर पावर-नियम का मामूली उपयोग करके सीमान्त की अवधारण को भी स्पष्ट करेंगे ताकि कुल, औसत व सीमान्त फलनों का परस्पर सम्बन्ध स्पष्ट हो सके।

फलनों व वक्रों का प्रयोग व्यष्टि अर्थशास्त्र के मांग व पूर्ति फलनों, कुल आय या कुलआगम (Total revenue) फलनों, उत्पत्ति-फलनों, लागत फलनों उत्पादन-सम्भावना-फलनों उपयोगिता-फलनों (तटस्थता वक्रों वहित) बगैर का वर्णन करेंगे, और संक्षेप में समष्टि अर्थशास्त्र में राष्ट्रीय आय-निर्धारण के मॉडल में समष्टि होने वाले कुछ फलनों जैसे उपभोग-फलन, विनियोग-फलन, आदि का सरल परिचय देंगे ताकि आगे चलकर व्यष्टि व समाष्टि अर्थशास्त्र दोनों के अध्ययन में सहूलियत रहें।

2.2 माँग-फलन, पूर्ति -फलन व संतुलन कीमत तथा संतुलन-उत्पत्ति एंव वक्र

(i) मांग फलन व वक्र—एक वस्तु की बाजार-मांग पर उसकी कीमत के अलावा निम्न तत्वों का भी प्रभाव पड़ता है जैसे (i) उपभोक्ताओं की संख्या (ii) उनकी रुचियों व अधिमान (Preferences), (iii) उपभोक्ताओं की आमदनी, (iv) अन्य परस्पर सम्बद्ध वस्तुओं की कीमतें। अन्य तत्त्वों को स्थिर मानकर जब एक ही समय में एक वस्तु की विभिन्न सम्भावित कीमतों पर मांग की विभिन्न मात्राओं को दर्शाया जाता है, तो उसे मांग-फलन कहते हैं। इसका सम्बन्ध विभिन्न समयों में बाजार में पायी जाने वाली विभिन्न कीमतों से नहीं होता, बल्कि एक ही समय में वैंकल्पिक व काल्पनिक कीमतों पर सम्भावित मांग की मात्राओं से होता है।

मांग-फलन एक निरंतर घटता हुआ फलन होता है? अर्थात् कीमत के बढ़ने पर मांग की मात्रा घटती जाती है। यह एक निश्चित फलन (explicit Function) होता है। p के किसी दिये हुए मूल्य पर मांग की, अर्थात, x की, एक निश्चित मात्रा होती है।

किसी भी फलन को ग्राफ पर दिखाने के लिए प्रायः स्वतंत्र चर को x-अक्ष पर तथा आश्रित चर को y-अक्ष पर कीमत लेते हैं और x-अक्ष पर मांग की मात्रा लेते हैं। इस प्रकार मांग-फलन के लिए x-अक्ष पर आश्रित चर (मांग की मात्रा) और y-अक्ष पर स्वतंत्र चर कीमत) लिये जाते हैं।

मांग-फलन को दो प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

(अ) $x = \varnothing(p)$, यहां मांग की मात्रा कीमत का फलन होती है।

इसमें $\varnothing$ का निशान, फाई, फलन का सूचक है।

(आ) $p = \Psi(x)$, यहां कीमत वस्तु की मांग की मात्रा का फलन होती है। इसमें ψ का निशान, साई, फलन का सूचक है।

उदाहरण 1.

$x = 15 - 5p$ (यह मांग फलन का प्रथम रूप है)

इसे परिवर्तित रूप में लिखने पर

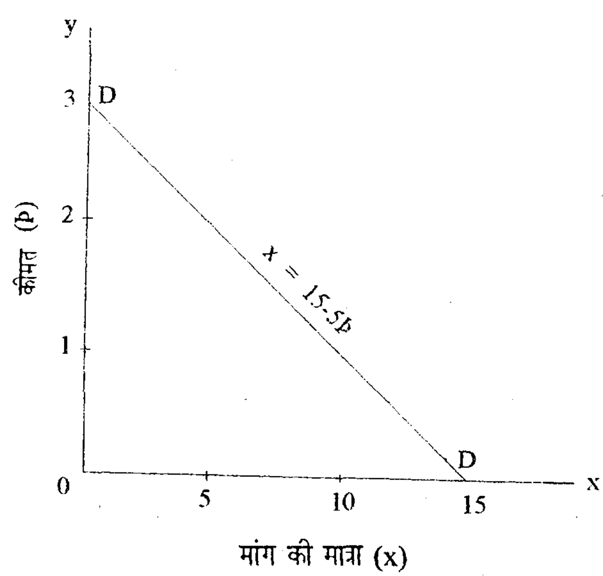
$p = 3 - \frac{1}{5}x$ (यह मांग-फलन का दूसरा रूप है)

रेखाचित्र

$x = 15 - 5p$ को चित्र पर दर्शाने के लिए निम्न बिन्दु अंकित किये जायेंगे।

तालिका 3.1

p =	0	1	2	3
x =	15	10	5	0



चित्र 2.1 रैखिक मांग-वक्र $x = 15 - 5p$

यहां $p = 0$ पर $x = 15$ है तथा $p = 3$ पर $x = 0$ है

इन दोनों बिन्दुओं को ग्राफ पर अंकित करके मिलाने से DD मांग-वक्र नता है जो प्रथम खण्ड में आता है, क्योंकि यहां p व x दोनों के धनात्मक मूल्य ही सार्थक होते हैं।

उदाहरण 2 :

मांग-वक्र एक आयताकार हाइपरबोला भी हो सकता है।

मान लीजिए, $x = \frac{45}{p+5} - 3$ अथवा, व्यवास्थित करने पर,

$(x + 3)(p + 5) = 45$

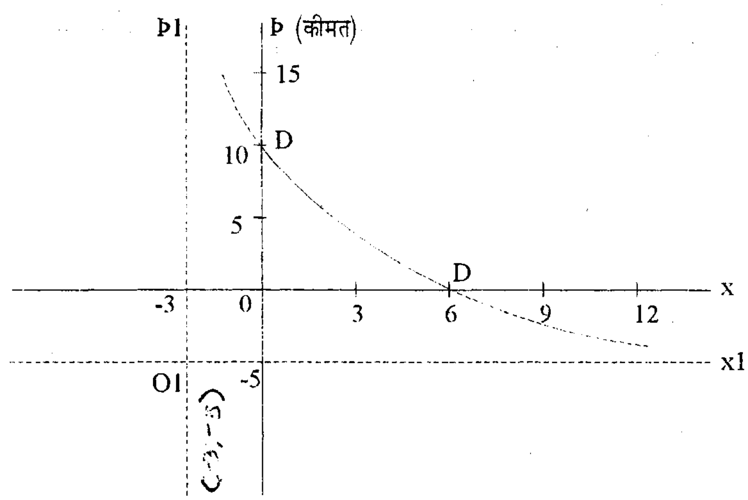
इसको ग्राफ पर अंकित करने पर खण्ड I व खण्ड III में दो वक्र बनते हैं, लेकिन खण्ड I के धनात्मक p व x मूल्य ही सार्थक होते हैं। अतः उनको ही निम्न चित्र में दर्शाया गया है

p के विभिन्न मूल्यों पर x की मात्राएं इस प्रकार होंगी :

तालिका 2.2

p	-2	0	5	10	15
x	12	6	1.5	0	-¾

इनको निम्न चित्र में दर्शाया गया है :



चित्र 2.2 मांग-वक्र —एक आयताकार अतिपरवलय

तालिका 2.2 में p के विभिन्न मूल्यों पर x के मूल्य $(x + 3)(p + 5) = 45$ के आधार पर प्राप्त किये गये हैं। यहां आयताकार हाइपरबोला का प्रथम खण्ड का DD अंश सार्थक है। इस वक्र का आगे-पीछे का रेखांकित अंश निरर्थक है। आयताकार हाइपरबोला का केन्द्र O_1 पर है जहां $x = -3$ व $p = -5$ हैं, जब कि ग्राफ का केन्द्र O पर है, जहां $x = 0$ व $p = 0$ है। यहां पर आयताकार हाइपरबोला के asymptotes o_1x_1 व o_1p_1 है। यदि आयताकार हाइपरबोला $(x - 3)(p - 5) = 45$ होता तो इसका केन्द्र (3, 4) पर होता जो प्रथम खण्ड में आता, अर्थात् $x = 3$ व $p = 5$ पर आता।

ऊपर चित्र 2 में आयताकार हाइपरबोला ox-अक्ष व op-अक्ष को तो काटता हुआ निकल जाता है, लेकिन यह o_1x_1-अक्ष व o_1p_1-अक्ष को छूने का प्रयास करता है, लेकिन वस्तुतः छू नहीं पाता है।

मांग-फलन के अन्य रूप—मांग-फलन के रैखिक व आयताकार हाइपरबोला के रूप ऊपर स्पष्ट किये गये हैं। लेकिन इसके निम्न रूप भी हो सकते हैं—

(i) $x = \dfrac{a - p^2}{b}$ (पैराबोला)

(ii) $x = ae^{-bp}$ (चरघातांकीय)

(iii) $p = \frac{1}{b} \log \frac{a}{x}$ (लघुगणकीय)

(इन सबमें x व p केवल घनात्मक मूल्य ले सकते हैं और a व b घनात्मक स्थिर राशियां (constants) होती हैं।)

पूर्व इकाइयों में इन विभिन्न प्रकार के फलनों की विस्तृत जानकारी दी जा चुकी है। उसके आधार पर दिये हुए आंकड़ों का उपयोग करके उनके मांग-वक्र खींचे जा सकते हैं।

(ii) पूर्ति-फलन व वक्र—एक वस्तु की बाजार में की जाने वाली पूर्ति पर कई तत्त्वों का प्रभाव पड़ता है जैसे (i) उस वस्तु की कीमत (ii) उत्पादन के साधनों की कीमते (iii) टेक्नोलोजी की दशाएं। साधारणतया एक समय में वस्तु की विभिन्न कीमतों पर सप्लाई की मात्राएं भिन्न-भिन्न होती हैं। कीमतों के बढ़ने पर पूर्ति बढ़ायी जाती है। यदि उत्पादन के साधनों की कीमतें घटती हैं तो वस्तु का उत्पादन बढ़ाया जाता है जिससे पूर्ति बढ़ती है। टेक्नोलोजी में सुधार होने से पूर्ति बढ़ती है क्योंकि लागत भी कम आती है।

पूर्ति-फलन में अन्य बातों को स्थिर रख कर, एक समय में एक वस्तु की विभिन्न सम्भावित कीमतों पर पूर्ति की विभिन्न मात्राएं देखी जाती हैं।

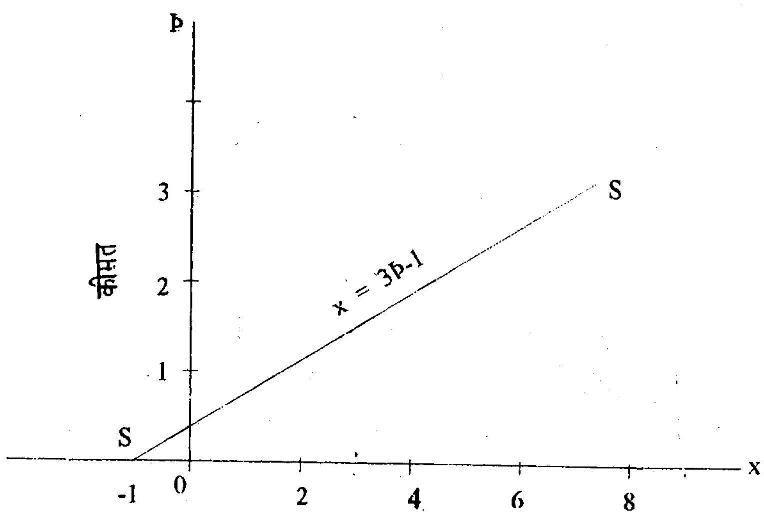
पूर्ति-फलन का उदाहरण—

$$x = 3p - 1$$

यहां x = पूर्ति की मात्रा व p = कीमत है। यह एक रैखिक फलन है। p के विभिन्न धनात्मक मूल्यों पर x के मूल्य ज्ञात करके पूर्ति फलन का रेखाचित्र बनाया जा सकता है जो इस प्रकार होगा।

तालिका 2.3

p	=	0	1	2	3
x	=	-1	2	5	8



चित्र 2.3 पूर्ति वक्र = x = 3p-1

चित्र 2.3 में कीमत के बढ़ने से पूर्ति की मात्रा बढ़ती है। $p = 0$ पर पूर्ति की मात्रा ऋणात्मक (-1) है। कीमत के बढ़ते जाने पर पूर्ति की मात्रा बढ़ती जाती है। पूर्ति वक्र ऊपर की ओर जाता है।

हमने चित्र 2.3 में रैखिक पूर्ति फलन दर्शाया है। लेकिन यह पैराबोलिक फलन भी हो सकता है, जैसे $x = p + \frac{1}{4}p^2$ अथवा $x = 2 + \frac{p}{5} + \frac{p^2}{20}$, आदि।

पूर्ति-फलन चरघातांकीय फलन का रूप भी ग्रहण कर सकता है क्योंकि यह ऊपर की ओर जाता है, यद्यपि इसकी ऊपर की ओर जाने की गति काफी तीव्र हुआ करती है। पूर्ति-फलन के लघुगणकीय होने पर यह धीमी गति से ऊपर की ओर जाता है।

(iii) मांग-वक्र की पूर्ति-वक्र के परस्पर कटाव से संतुलन-कीमत व संतुलन उत्पत्ति का निर्धारण: मांग व पूर्ति वक्रों का एक साथ उपयोग करके हम उनके परस्पर कटाव से संतुलन-कीमत व संतुलन-उत्पत्ति का निर्धारण कर सकते हैं। पिछले दो फलनों को एक साथ रखकर हल करने पर निम्न परिणाम आता है जिसे रेखाचित्र पर भी देखा जा सकता है।

मांग की ओर : $x = 15 - 5p$ ... (1)

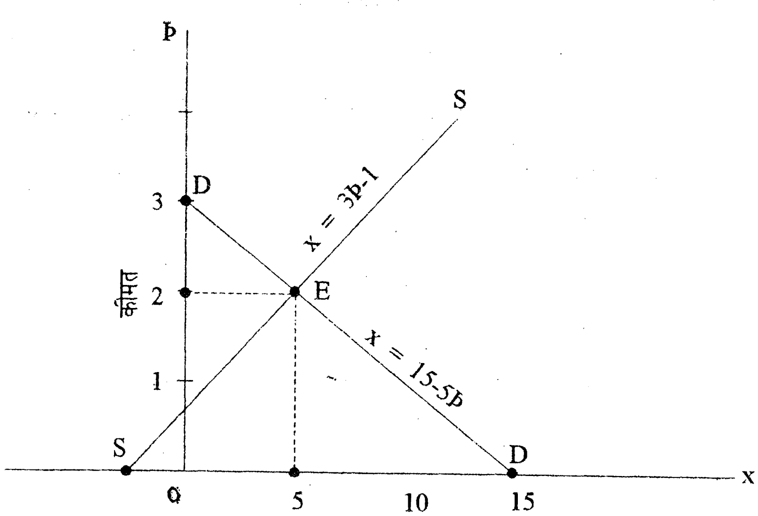
पूर्ति की ओर : $x = 3p - 1$ ... (2)

संतुलन की दशा में कुल मांग = कुल पूर्ति $(Q_d = Q_s)$

$\therefore 15 - 5p = 3p - 1$

अथवा $-8p = -16$

$\therefore p = 2$ तथा $x = 5$ [(1) व (2) दोनों में $p = 2$ रखने पर]



चित्र 2.4 संतुलन कीमत व संतुलन उत्पति का निर्धारण

चित्र 2.4 में मांग-वक्र DD व पूर्ति-वक्र SS दोनों एकदूसरे को E बिंदु पर काटते हैं। जहां मांग की मात्रा = पूर्ति की मात्रा = 5 इकाई होती है। अतः दिये हुए मांग व पूर्ति-फलनों की स्थिति में संतुलन-कीमत = 2 इकाई (रुपये) तथा मांग व पूर्ति की मात्राएं 5 इकाई निर्धारित होंगी इस प्रकार मांग व पूर्ति दोनों फलनों के दिये होने पर हम संतुलन कीमत व संतुलन मात्राएं इंगित कर सकते हैं।

बोध प्रश्न

प्रश्न 1. निम्नलिखित में से मांग-फलन प पूर्ति-फलन छांटिए और उनको रेखाचित्र पर दर्शा कर संतुलन कीमत व संतुलन मात्रा ज्ञात कीजिए।

$x = 4p - 1$ तथा $x = 4 - p^2$

(यहा x वस्तु की मात्रा तथा p कीमत के सूचक है।)

प्रश्न 2. मांग-फलन के सभावित रूप बतलाइए।

प्रश्न 3. $p = \frac{a}{x} - c$ मांग-वक्र की आकृति किस प्रकार की होगी?

2.3 कुल आगम फलन (Total Revenue Functions), सीमांत आयम फलन व औसत आय फलन एवं वक्र :

कुल आय या कुल आगम निकालने के लिए कीमत (p) को बिक्री की मात्रा (x) से गुणा किया जाता है। अतः TR = px होता है। हम पहले बतला चुके हैं कि मांग-फलन या औसत आय-फलन दो प्रकार से लिखा जा सकता है:

$x = Ø(p)$ एवं $p = \psi(x)$

चूंकि TR = px होता है, इसलिए कुल आय-फलन भी दो प्रकार से लिखा जा सकता है:?

(i) $TR = px = p\,Ø(p)$ (यहां कुल आय को p के फलन के रूप में रखा गया है।)

(ii) $TR = px = x\,\psi(x)$ (यहां कुल आय को x के फलन के रूप में रखा गया है।)

अधिकांश कुल आय-फलन द्वितीय रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं। इसमें दाहिनी तरफ मांग की मात्रा ली जाती है। अतः ग्राफ में ox- अक्ष पर मांग की मात्रा व oy- अक्ष पर कुल आय (TR) दिखलायी जाती है।

चूंकि TR = px होता है,

$\therefore AR = \frac{TR}{x} = p$, अथवा मांग-फलन होता है।

तथा $MR = \frac{d(TR)}{dx}$ होता है, अर्थात् TR का प्रथम अवकलन (x के संदर्भ में) सीमांत आय-फलन (MR function) होता है।

उदाहरणः—

मान लीजिए $p = 12 - x$ (मांग-फलन या औसत आय AR फलन है)

स्मरण रहे कि यहां p को x के फलन के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

$\therefore TR = px = x(12 - x) = 12x - x^2$ ... (i)

$MR = \frac{d(TR)}{dx} = 12 - 2x$ (TR का x के संदर्भ में प्रथम अवकलज लेने पर ... (ii)

निम्न तालिकाओं में x के विभिन्न मूल्यों पर कुल आय (TR) व सीमांत आय (MR) की राशियां दर्शायी गयी हैं।

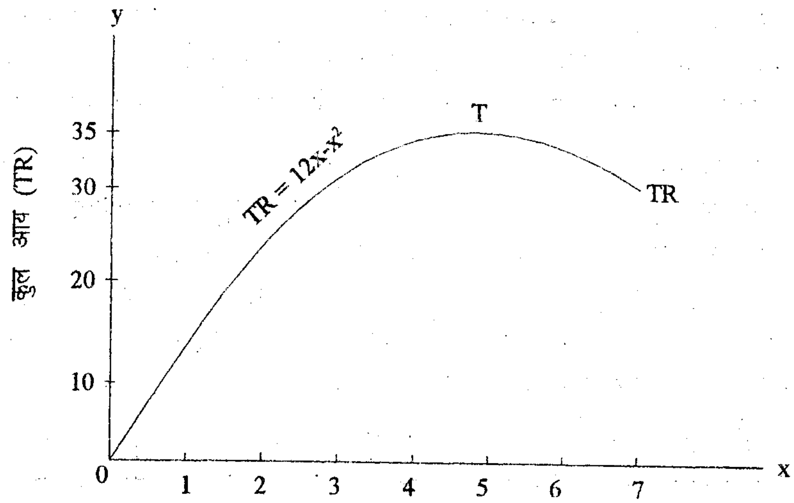
तालिका 3.4

वस्तु की मात्रा (x) (1)	कुल आय (TR) (2)	$MR = \frac{\Delta R}{\Delta x}$ (3)	$= MR = \frac{d(TR)}{dx}$ (4)	$p = AR = \frac{TR}{x}$ (5)
0	0		-	-
		11		
1	11		10	11
		9		
2	20		8	10
		7		
3	27		6	9
		5		
4	32		4	8
		3		
5	35		2	7
		1		
6	36		0	6
		(-) 1		
7	35		- 2	5
		(-) 3		
8	32		- 4	4

तालिका के निर्माण का स्पष्टीकरण

कॉलम (1) व कॉलम (2) से कुल आय-वक्र बनाया जाएगा। इसमें $TR = 12x - x^2$ संबंध में x के विभिन्न मूल्यों पर TR की राशियां इंगित कर गई हैं। TR की राशि 6 इकाई तक बढ़ती है, लेकिन 7वीं इकाई से घटने लग जाती है। कॉलम (3) में सीमांत आय की गणना की विधि इस प्रकार की गयी है: वस्तु की एक इकाई के बढ़ने से कुल आय की वृद्धि का माप किया गया है जैसे वस्तु की शून्य इकाई पर TR = 0 व वस्तु की एक इकाई पर TR = 11 है अतः 0 व 1 इकाई के बीच MR की राशि = 11 - 0 = 11 है। इसी प्रकार 1 व 2 इकाई के बीच MR की राशि = 20 - 11 = 9 है, आदि। कॉलम (4) में भी MR की गणना की गयी है, लेकिन वह सीधे MR फलन = 12 - 2x से इंगित की गई है जैसे एक इकाई पर MR = 12 - 2 = 10 है, 2 इकाई पर 12 - 4 = 8 है, आदि, आदि। यहां अवकलन से MR फलन इंगित किया गया है। अंत में कॉलम (5) में AR फलन से AR की राशि वस्तु की विभिन्न मात्राओं पर निकाली गयी है। स्मरण रहे कि कॉलम (4) में MR का ढाल (slope) = - 2 है तथा कॉलम (5) में AR का ढाल = -1 है। दानों के अंतःखंड (intercept) y - अक्ष पर = 12 है।

अब हम TR, AR व MR के रेखाचित्र देते हैं।



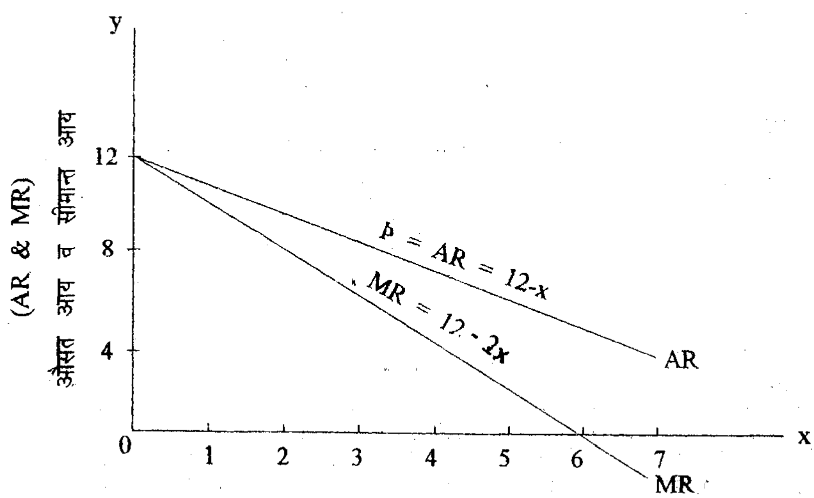
चित्र 2.5 (a) कुल आगम वक्र

चित्र 2.5 (a) में TR वक्र ऊपर की ओर उठता है। यह 6 इकाई पर 36 पर पहुंच जाता है जो इसकी सर्वाधिक मात्रा है। ऐसा वक्र पर T बिंदु पर होता है। उसके बाद TR घटता जाता है और आगे चलकर $x = 12$ यह $(144 - 144) = 0$ हो जाता है। ox - अक्ष के दाहिनी ओर $x = 12$ तक चलने पर $TR = 0$ की दशा आ जायेगी। पूरा TR वक्र एक पैराबोला की आकृति ले लेता है।

नीचे चित्र 2.5 (b) में AR व MR वक्र खींचे गये हैं। ये रैखिक फलन से प्राप्त हुए हैं। ये दोनों y - अक्ष पर 12 से प्रारंभ होते हैं। MR वक्र $x = 6$ पर शून्य हो जाता है जहां $TR = 36$ अधिकतम होता है। उसके बाद MR ऋणात्मक (negative) होता है। MR वक्र AR वक्र से नीचे रहता है। AR का ढाल -1 है, जब कि MR का ढाल -2 है। दानों का y - अंत:खंड = 12 है।

बोध प्रश्न 2 इकाई के अंत में दिये गये अंतरों से अपने उत्तरों का मिलान करें।

(1) यदि $AR = p = 10 - x$ जहां p = कीमत व x वस्तु मी मात्रा की सूचक है तो TR व MR की मात्राएं ज्ञात कीजिए व तीनों वक्रों का चित्र दिखाइए।



चित्र 2.5 (b) औसत एवं सीमांत आगम वक्र

2.4 लागत-फलन व वक्र - कुल लागत सीमांत लागत व औसत लागत

यदि कुल लागत को π (पाई) से सूचित किया जाये तो $\pi = f(x)$ कुल लागत फलन होगा जहां x उत्पत्ति की मात्रा का सूचक है। रेखाचित्र में ox - अक्ष पर उत्पत्ति की मात्रा व oy - अक्ष पर कुल लागत दिखलायी जाती है। सीमांत लागत व औसत लागत वक्र बनाते समय इनको भी oy - अक्ष पर मापा जाता है।

कुल लागत वक्र स्थिर दशाओं (static conditions) को सूचित करता है जैस इसमें हम (i) उत्पादन की तकनीक व (ii) परिवर्तनशील साधनों की पूर्ति की दशाओं को स्थिर मान लेते हैं। इन दशाओं में परिवर्तन होने से स्वयं कुल लागत वक्र ही बदल जाता है। जैसे मान लीजिए, उत्पादन की तकनीक में सुधार हो जाये अथवा उत्पादन का कोई साधन जैसे श्रम, पूंजी आदि पहले से सस्ता हो जाये तो कुल लागत घट जाने से कुल लागत वक्र नीचे खिसक जायेगा। इसके विपरीत यदि उत्पादन के साधनों के मूल्य बढ़ जायें तो कुल लागत बढ़ने से इसका वक्र ऊपर की ओर खिसक जायेगा।

यहां यह स्पष्ट होना जरूरी है कि कुल लागत एक "न्यूनतम (minimum) किस्म की धारणा" है, अर्थात् यह उत्पत्ति की विभिन्न मात्राओं के लिए लगायी जाने वाली कम से कम या न्यूनतम लागत को सूचित करती है। यह एक मूल्य वाला मोनोटोनिक फलन होता है, अर्थात् निरंतर बढ़ने वाला फलन होता है।

नीचे $\pi = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200$ के आधार पर कुल लागत, औसत लागत व सीमांत लागत वक्र दर्शाये गये हैं।

यहां कुल लागत-फलन है: $\pi = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 200 \quad ...(1)$

अतः औसत लागत फलन है: $AC\frac{\pi}{x} = \frac{1}{10}x + 5 + \frac{200}{x} \quad ...(2)$

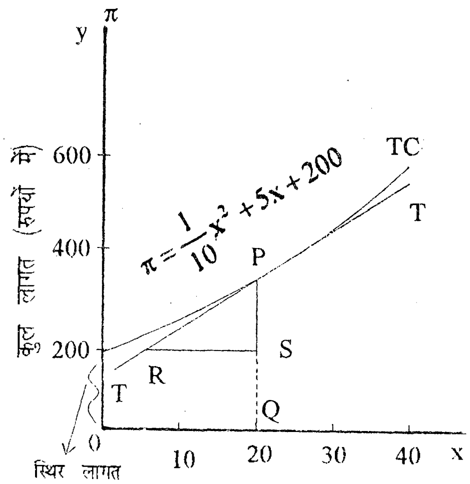
तथा सीमांत लागत फलन है: $MC\frac{d\pi}{dx} = \frac{1}{5}x + 5 \quad ...(3)$

(पावर नियम से आवलन लेने पर)

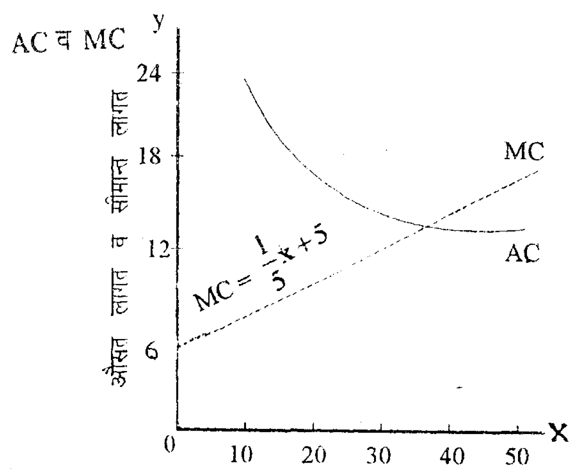
तालिका 2.5

उत्पत्ति की मात्रा (x) कॉलम (1)	कुल लागत (TC) = π (2)	औसत लागत (AC) $\frac{\pi}{x}$ (3)	सीमांत लागत (MC) $\frac{d\pi}{dx}$ (4)
0	200	-	5
10	260	26	7
20	340	17	9
30	440	14-2/3	11
40	560	14	13

यहां तीनों प्रकार के लागत-फलनों में x की विभिन्न मात्राएं 0, 10, 20, 30 व 40 लगाकर कुल लागत, औसत लागत व सीमांत लागत की गणना की गई है। जिन्हें क्रमशः कॉलम (2), कॉलम (3) व कॉलम (4) में दिखाया गया है। आगे इन्हें रेखाचित्र पर दर्शाया गया है।



चित्र 2.6 (a) कुल लागत वक्र



चित्र 2.6 (b) औसत लागत व सीमांत लागत वक्र

चित्र 2.6 (a) पर कुल लागत वक्र (TC) दिखाया गया है। यह oy - अक्ष पर 200 रुपयों से चालू होता है जो स्थिर लागत (fixed cost) है। यह शून्य उत्पत्ति पर भी लगानी होती है। उसके बाद कुल लागत वक्र ऊपर की ओर जाता है। यहां पर धनात्मक मूल्य दिखाने से पैराबोला का एक अंश ही काम का है, जो प्रथम खंड में आया है। इस पर किसी भी बिंदु पर औसत लागत ज्ञात करने के लिए लंबवत दूरी में क्षैतिज दूरी का भाग दिया जाता है। जैसे p बिंदु पर औसत लागत $= \frac{PQ}{OQ}$ होगी। इस वक्र पर सीमांत लागत ज्ञात करने के लिए उस बिंदु पर स्पर्श रेखा का ढाल ज्ञात किया जाता है जैसे P बिंदु पर TT स्पर्श रेखा का ढाल $= \frac{PS}{RS}$ है। इसी प्रकार अन्य बिंदुओं पर भी AC व MC निकाले जा सकते हैं।

चित्र 2.6 (b) पर AC व MC वक्र दर्शाये गये हैं। AC वक्र को MC वक्र उसके न्यूनतम बिंदु पर काट कर आगे बढ़ता है। यहां MC वक्र एक सरल रेखा है क्योंकि यह रैखिक फलन का परिणाम है।

कुल लागत फलन के विभिन्न रूप

(1) $\pi = ax + b$ (रैखिक)

(2) $\pi = ax^2 + bx + c$ (पैराबोला)

(3) $\pi = ax^3 - bx^2 + cx + d$ (त्रिघाती फलन)

(4) $\pi = ac^{bx}$ (चरघातांकीय फलन आदि, आदि।)

इनमें प्रत्येक स्थिति में a, b, c व d पैरामीटर धनात्मक (positive) होते हैं।

बोध प्रश्न 3. इकाई के अंत में दिये गये अंतरों से अपने अंतरों का मिलान करें।

(1) निम्नलिखित कुल लागत-फलनों की किस्म लिखिए:

(i) $\pi = -2.1 + 2.4Q$

(ii) $\pi = 4 + .5Q + .2Q^2$

(iii) $\pi = 60Q^{0.72}$

(iv) $\pi = 35 + 5Q - 2Q^2 + 2Q^3$, यहां Q उत्पत्ति की मात्रा व π कुल लागत के सूचक हैं।

(2) प्रश्न 1 (iv) के कुल लागत-फलन, औसत लागत-फलन व सीमांत लागत-फलन को रेखाचित्र पर दिखाइए।

[संकेत: $AC = \frac{35}{5} + 5 - 2Q + 2Q^2$ तथा

$MC = 5 - 4Q + 6Q^2$ हैं।]

2.5 उत्पादन-फलन व वक्र - कुल उत्पत्ति, सीमांत उत्पत्ति व औसत उत्पत्ति

उत्पादन-फलन में उत्पादन की मात्रा का संबंध साधनों की मात्राओं से स्थापित किया जाता है। मान लीजिए, उत्पादन की मात्रा की पूंजी व श्रम की मात्रा पर निर्भर करती है तो इसे निम्न रूप में दर्शाया जा सकता है: $Q = f(K, L)$, यहां Q उत्पत्ति की मात्रा तथा K पूंजी की इकाइयों व L श्रम की इकाइयों के सूचक हैं।

यहां पर यह स्मरण रखना होगा कि उत्पादन-फलन एक अधिकतम की अवधारणा (maximum concept) है; अर्थात् यह उत्पादन की उस अधिकतम मात्रा को सूचित करता है, जो दी हुई टेक्नोलॉजी की दशा में, साधनों के किसी विशिष्ट संयोग से प्राप्त की जा सकती है। उत्पादन-फलन के कई रूप होते है, लेकिन आमतौर पर इसमें 'पावर-फलन' का अधिकतम प्रचलन देखा गया है। कॉब-डूगलस उत्पादन-फलन काफी लोकप्रिय माना गया है। यह $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$ से सूचित किया जाता है जहां Q उत्पत्ति तथा L व K क्रमशः श्रम व पूंजी की मात्राओं को प्रकट करते हैं। यहां A, α व β प्राचल (parameters) है। α = श्रम की उत्पत्ति-लोच और β = पूंजी की उत्पत्ति-लोच हैं। पैमाने के प्रतिफल $(\alpha+\beta)$ की राशि पर निर्भर करते हैं। प्रायः $\alpha+\beta=1$ मान कर इस फलन में पैमाने के स्थिर प्रतिफलों पर विचार किया जाता है। α या श्रम की उत्पत्ति-लोच निकालने के लिए उत्पत्ति के प्रतिशत परिवर्तन में श्रम के प्रतिशत परिवर्तन का भाग दिया जाता है। इसी प्रकार β, या पूंजी की उत्पत्ति-लोच, ज्ञात करने के लिए किया जाता है। उत्पादन-फलन रैखिक, पैराबोलिक, त्रिघाती व कॉब-डूगलस आदि किस्मों के हो सकते हैं। हम यहां कॉब डूगलस किस्म के उत्पादन-फलन का उदाहरण देते हैं।

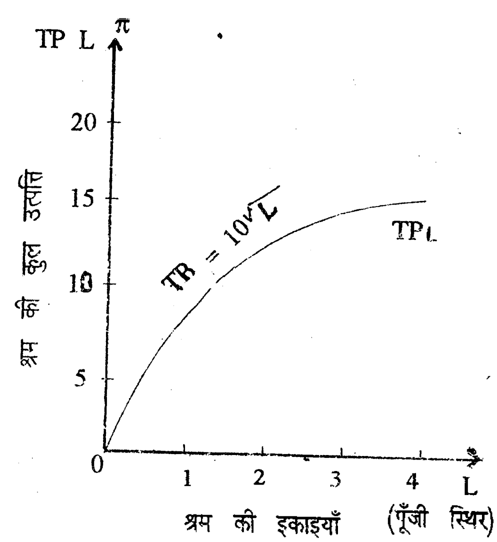
उदाहरणः— यदि $Q = 10\,L^{1/2}K^{1/2}$ होए तो पूंजी को स्थिर मानकर श्रम के लिए कुल उत्पत्ति, सीमांत उत्पत्ति व औसत उत्पत्ति वक्र खींचिए।

हल(1):— श्रम की कुल उत्पत्ति $= TP_L = 10L^{1/2}1^{1/2} = 10L^{1/2} = 10\sqrt{L}$

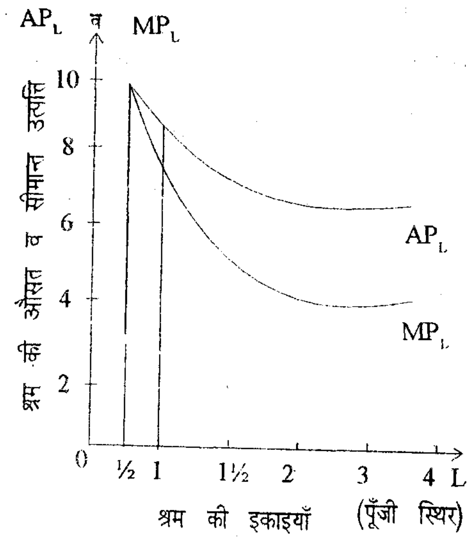
तालिका 2.6

श्रम की मात्रा (L) कॉलम (1)	श्रम की कुल उत्पत्ति (TP_L) (2)	श्रम की औसत उत्पत्ति (AP_L) (3)	श्रम की सीमांत उत्पत्ति $(MP_L) = \frac{\Delta TP}{\Delta L}$ (4)
0	0	...	...
1	10.00	10.00	10.00
2	14.14	7.07	4.14
3	17.32	5.77	3.18
4.	20.00	5.00	2.68

सर्वप्रथम, श्रम के कुल उत्पत्ति फलन $Q = 10\sqrt{L}$ में श्रम की विभिन्न इकाइयों के लिए श्रम की कुल उत्पत्ति निकाली गयी है। औसत उत्पत्ति के लिए कुल उत्पत्ति में श्रम का भाग दिया गया है। $AP_L = \frac{TPL}{L}$ होता है। यहां श्रम की सीमांत उत्पत्ति ज्ञात करने के लिए कुल उत्पत्ति की वृद्धि में श्रम की वृद्धि का भाग दिया गया है। जैसे श्रम की तीसरी इकाई पर श्रम की सीमांत उत्पत्ति = (17.32 - 14.14) = 3.18 आती है, आदि।



चित्र 2.7 (a) TP_L वक्र



(b) AP_L व MP_L वक्र

चित्र 2.7 (a) में TP_L वक्र तथा चित्र 2.7 (b) में AP_L व MP_L वक्र खींचे गये है जिनके आंकड़े ऊपर की सारणी से लिये गये हैं। MP_L को श्रम के मध्य-बिंदुओं (mid-points) के ऊपर अंकित किया गया है; जैसे ½ श्रमिक की सीध में सीमांत उत्पत्ति की मात्रा 10 इकाई, 1½ श्रमिक की सीध में 4.14 इकाई सीमांत उत्पत्ति दर्शायी गयी है। जब श्रम के सीमांत उत्पत्ति फलन (MP_L function) से गणना की जाती, तो श्रम की क्रमशः 1, 2, 3 इकाइयों के सामने उनकी सीमांत उत्पत्ति दिखायी जा सकती थी। यहां श्रम के लिए उत्पादन का दूसरा चरण (Second stage) दर्शाया गया है।

बोध प्रश्न 4. इकाई के अंत में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तर का मिलान करें।

(1) यदि एक भूमि के टुकड़े पर श्रम की विभिन्न इकाइयों से प्राप्त उत्पत्ति का उत्पादन-फलन $Q = 10L + 10L^2 - L^3$ से सूचित किया जाता है, तो सारणी में TP_L, AP_L, व MP_L दर्शाइए, तथा उन्हें ग्राफ पर अंकित करिए। MP_L की मात्रा इसके फलन के आधार पर दर्शाएं।

2.6 उत्पादन संभावना वक्र (Production possibility curves) व फलन

ये रूपांतरण-फलन या वक्र (transformation functions or curves) भी कहलाते हैं। एक फर्म अपने दिये हुए साधनों का पूरा उपयोग करके एवं पूरी कार्यकुशलता से उपयोग करके x व y वस्तुओं के विभिन्न संयोग उत्पन्न कर सकती है। इसके लिए तकनीकी दशाएं स्थिर मानी जाता है। $y = f(x)$ लिया जा सकता है। यहां y, x का एक मूल्यवाला व घटता हुआ फलन होता है। इसी प्रकार $x = g(y)$ में x, y का एक मूल्य वाला व घटता हुआ फलन होता है। इस फलन में एक वस्तु का उत्पादन अधिक होता है तो दूसरी का कम होता है। उत्पादन-संभावना वक्र मूल बिंदु के नतोदर (concave) होता है। अव्यक्त रूप में (implicit form) में यह फलन $F(x, y) = 0$ होता है जैसे $y^2 + x + 4y - 20 = 0$। एक सामान्य स्थिति में, एक वस्तु का उत्पादन बढ़ाये जाने पर दूसरी वस्तु का उत्पादन वर्द्धमान दर से घटता है (decreases as an increasing rate)। इसीलिए यह मूलबिंदु के नतोदर होता है।

उत्पादन-संभावना वक्र एक अधिकतम किस्म की अवधारणा (maximum concept) है; क्योंकि यह दोनों वस्तुओं की अधिकतम उत्पादन की संभावनाओं को व्यक्त करता है। फर्म अपने साधनों का पूरा व

सर्वाधिक कार्यकुशल उपयोग करके उत्पादन-संभावना वक्र की सीमाओं पर उत्पादन कर सकती है, लेकिन वह इनसे परे नहीं जा सकती, और इनसे पीछे रहने से कोई लाभ नहीं होता।

उत्पादन-संभावना वक्र के कई रूप हो सकते हैं। जैसे अंडाकार (elliptic), वृत्ताकार (circular), पैराबोलिक तथा आयताकार हाइपरबोलिक। लेकिन इन सभी वक्रों के प्रथम खण्ड में पड़ने वाले अंश का ही महत्त्व माना जाता है, शेष अंश निरर्थक होता है।

उदाहरण:— एक फर्म अपने दिये हुए साधनों से दो प्रकार का मिश्री मावा (x व y किस्म का) बनाती है। y किस्म के मिश्री मावे का x किस्म के मिश्री मावे में निम्नांकित फलन दिया हुआ है:

$$y = 9 - \frac{18}{10 - x} \qquad (x < 10)$$

बतलाइए कि यह उत्पादन-संभावना वक्र किस किस्म का है और x व y किस्म के मिश्री मावों की ज्यादा से ज्यादा उत्पादित की जाने वाली मात्राएं ज्ञात कीजिए।

हल:— $$y = 9 - \frac{18}{10 - x}$$

$$\therefore (y - 9)(10 - x) = -18$$

$$\therefore (x - 10)(y - 9) = 18 \quad \text{(निशान बदलने पर)}$$

अतः यह एक आयताकार हाइपरबोला है जिसका केंद्र $x = 10$ तथा $y = 9$ पर है। अब $(x - 10)(y - 9) = 18$ का उपयोग करके वक्र बनाया जायेगा। x की ज्यादा से ज्यादा मात्रा निकालने के लिए $y = 0$ रखना होगा, जिससे $(x - 10)(-9) = 18$

$$\therefore x - 10 = -2 \qquad \therefore x = -2 + 10 = 8$$

इसी प्रकार y की सर्वाधिक मात्रा निकालने के लिए $x = 0$ रखना होगा, जिससे-

$$-10(y - 9) = 18$$

$$y - 9 = -1.8$$

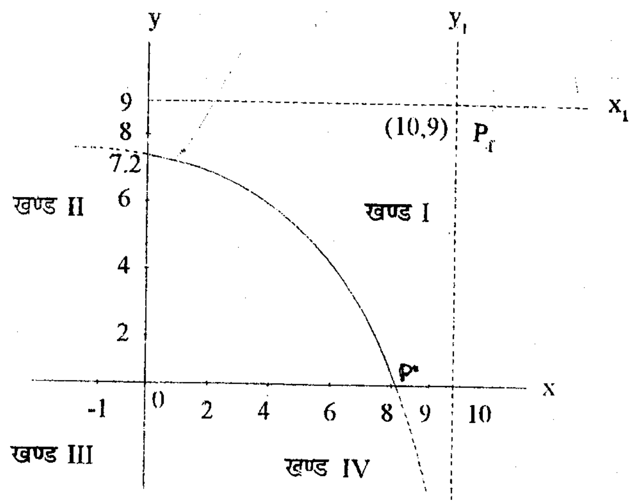
$$y = -1.8 + 9 = 7.2$$

अतः $x = 8$ व $y = 7.2$ इनकी अधिकतम मात्राएं होंगी।

रेखाचित्र बनाने के लिए निम्न तालिका के अंकों का उपयोग किया जाना चाहिए।

तालिका 2.7

$x =$	-1	0	2	4	6	8	9
$y =$	7.4	7.2	6.75	6	4.5	0	-9



चित्र 2.8 उत्पादन संभावना वक्र $(x - 10)(y - 9) = 18$

चित्र 2.8 में y की अधिकतम मात्रा 7.2 इकाई तथा x की अधिकतम मात्रा 8 इकाई आती है। PP उत्पादन-संभावना-वक्र है, जिस पर x व y के अन्य संयोग अंकित किये गये हैं। स्मरण रहे कि आयताकार हाहपरबोला का केंद्र ऊपर की ओर o_1 पर है, जहां o_1x_1 व o_1y_1 आयताकार हाइपरबोला के दो asumptates हैं और यह केंद्र $x = 10$ व $y = 9$ पर स्थित है। PP का जो रेखांकित अंश द्वितीय खंड व चतुर्थ खंड में पड़ता है, वह निरर्थक है।

बोध प्रश्न 5.

(1) एक कंपनी दो प्रकार की आइसक्रीम बनाती है, x व y किस्म की उत्पादन-संभावना वक्र का फलन इस प्रकार है:

$5x^2 + 2y^2 - 98 = 0$ (अव्यक्त रूप में **in the implicit form**)

चित्र बनाइए व x तथा y की अधिकतम मात्राएं ज्ञात कीजिए। इसके चित्र का आकार कैसा होगा?

2.7 उपयोगिता-फलनः- गणनावाचक रूप (cardinal form) तथा क्रमवाचक रूप में (ordinal form) तटस्थता वक्र व उनके फलनों की किस्में

(i) उपयोगिता फलनः गणनावाचक रूप में:

इसके अंतर्गत उपयोगिता को मापा जाता है। मान लीजिए,

$U = f(x) = 12x - x^2$ है तो

सीमांत उपयोगिता $MU = \frac{du}{dx} = 12 - 2x$ होगा। यहां औसत उपयोगिता का फलन AU फलन $= 12 - x$ है। लेकिन इसका उपयोग कम होता है।

तालिका 2.8

वस्तु की इकाइयां	कुल उपयोगिता	सीमांत उपयोगिता
कॉलम (1)	(2) (TU)	$[\frac{du}{dx}]$ (3)
0	0	-
1	11	10
2	20	8
3	27	6
4	32	4
5	35	2
6	36	0
7	35	-2

यहां कॉलम (1) व (2) को ग्राफ पर अंकित करने पर उपयोगिता वक्र (TU) बनेगा। ox - अक्ष पर वस्तु की इकाइयां मापी जायेंगी, और oy - अक्ष पर कुल उपयोगिता। पुनः कॉलम (1) व (3) को अंकित करने पर सीमांत उपयोगिता रेखा प्राप्त होगी जिसका ढाल (-) 2 है। जब 6 इकाइयों पर कुल उपयोगिता अधिकतम होती है तो सीमांत उपयोगिता शून्य होती है। जब कुल उपयागिता घटती है तो सीमांत उपयोगिता ऋणात्मक होती है।

(ii) उपयोगिता फलनः क्रमवाचक रूप में: तटस्थता वक्र का फलन व वक्र

क्रमवाचक रूप में उपयोगिता फलन तटस्थता वक्र के फलन के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इसमें उपयोगिता को इकाइयों में मापने की आवश्यकता नहीं होती। केवल x व y वस्तुओं के समान संतोष देने वाले संयोग एक तटस्थता वक्र पर दर्शाये जाते हैं। उससे ऊंचे वक्र पर अधिक संतोष प्रदान करने वाले संयोग अंकित किये जाते हैं। इस प्रकार एक तटस्थता मानचित्र पर कई तटस्थता वक्र होते हैं जो उपभोक्ता के अधिमान के पैमाने को दर्शाते हैं। स्मरण रहे कि एक तटस्थता मानचित्र पर उपभोक्ता की रुचियां स्थिर रहती है। रुचियों के बदलने से स्वयं तटस्थता मानचित्र ही बदल जाता है।

एक तटस्थता वक्र का फलन $f(x, y) = a$ किस्म का होता है। यहां x, y व a धनात्मक मूल्य लेते हैं। a को कोई निश्चित मूल्य देकर एक तटस्थता वक्र बनाया जा सकता है। इसको अलग-अलग मूल्य देकर अलग-अलग तटस्थता वक्र बनाये जा सकते हैं।

मान लीजिए, एक व्यक्ति का उपयोगिता फलन इस प्रकार है:

$U = xy = a$

यदि हम एक संयोग में $x = 10$ व $y = 10$ लेते है तो $xy = 10 \times 10 = 100$ होता है। दाहिनी तरफ 100 इकाई रखते हुए x व y के निम्न संयोग भी हो सकते हैं: जैसे—

x	y	xy
5	20	$100 = 5 \times 20$
1	100	100 आदि।

इन संयोगों के बीच उपभोक्ता तटस्थ भाव रखता है। लेकिन 5 इकाई x व 5 इकाई y का संयोग, जो यहां $5 \times 5 = 25$ होता है, इनसे कम संतुष्टि देगा। लेकिन $30 \times 5 = 150$ अधिक संतोष प्रदान करेगा। यहां सिर्फ इस प्रकार विचार किया जाएगा कि 25 संख्या 100 संख्या से कम है, इसलिए इस पर संतोष कम है। इसी प्रकार 150 संख्या 100 से अधिक स्मरण रहे है। कि यहां उपयोगिता या संतोष का माप नहीं किया जाता। ऊपर तटस्थता फलन में a अधिमान के पैमाने का प्राचल (parameter of the scale of preference) का सूचक होता है।

तटस्थता वक्र का एक सरल फलनः

$(x+h)(y+k) = a$ एक तटस्थता वक्र का फलन लिया जा सकता है। यहां h व k के बदलने से एक नया तटस्थता मानचित्र बनेगा। लेकिन दिये हुए h व k पर, a के एक निश्चित मूल्य से एक तटस्थता वक्र ही बनता है। अतः h व k को स्थिर रखकर एवं a को बदलते हुए एक तटस्थता मानचित्र के विभिन्न तटस्थता वक्र प्राप्त किये जा सकते हैं। ऐसा आगे के उदाहरण में किया गया है।

उदाहरण: $(x + 2)(y + 1) = a$ में $a = 4$ तथा $a = 8$ पर दो तटस्थता वक्र खींचिए।

$(x + 2)(y + 1) = 4$ के लिए निम्न अंकों का प्रयोग करें:

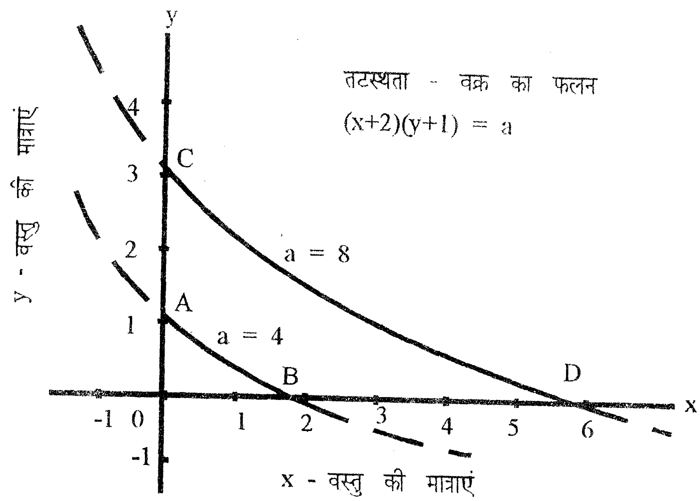
तालिका 2.9

x =	-1	0	1	2	3	4
y =	3	1	1/3	0	-1/5	-1/3

इसी प्रकार $(x + 2)(y + 1) = 8$ के लिए निम्न अंकों का प्रयोग करें:

तालिका 2.10

x =	-1	0	1	2	3	6	8
y =	7	3	5/3	1	3/5	0	-1/5



चित्र 2.9 तटस्थता वक्र फलन

स्पष्टीकरणः— चित्र 2.9 में एक तटस्थता वक्र $(x + 2) (y + 1) = 4$ को दर्शाता है। यहां $x = 0$ पर $y = 1$ होता है तथा $x = 2$ पर $y = 0$ होता है। अतः AB तटस्थता वक्र है। इससे आगे-पीछे के अंश ऋणात्मक राशियों के आने से व्यर्थ माने जाते हैं।

इसी प्रकार दूसरा ऊपर वाला तटस्थता वक्र $(x + 2) (y + 1) = 8$ को दर्शाता है। यहां $x = 0$ पर $y = 3$ तथा $x = 6$ पर $y = 0$ है। अतः CD दूसरा तटस्थता वक्र बनता है। इस प्रकार a को अलग-अलग मूल्य देकर कई तटस्थता वक्र बनाये जा सकते है। इनका खंड I में आने वाला अंश ही सार्थक होता है, क्योंकि इसमें धनात्मक मूल्य होते हैं।

पुनः स्मरण रहे कि h व k (यहां क्रमशः 2 व 1) को बदलने से संपूर्ण तटस्थता मानचित्र ही बदला जाएगा। h व k को स्थिर रखकर कर केवल a को बदलने से एक नया तटस्थतर वक्र प्राप्त होता है। लेकिन तटस्थता मानचित्र वही बना रहता है।

तटस्थता वक्रों के फलन कई प्रकार के हो सकते हैं। ऊपर हमने आयताकार हाइपरबोला का रूप लिया है। यह पैराबोलिक प्रणाली का भी हो सकता है; जैसे $y + k = \frac{1}{a^2}\{x - h)a - 1\}^2$ तथा वृत्त प्रणाली (circles) का भी हो सकता है जैसे $x + y + \sqrt{2xy} = a$, अथवा $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ हो सकता है।* इनमें h, k व a को मूल्य देकर गणनाएं की जा सकती हैं।

बोध प्रश्न 6.

(1) एक तटस्थता वक्र प्रणाली में निम्नांकित संबंध दिया हुआ है:

$(x + 1) (y + 2) = 2a$

$a = 4$ व 6 पर दो वक्र खींचिए।

2.8 राष्ट्रीय आय का निर्धारण : उपभोग फलन, विनियोग, सरकारी व्यय तथा संतुलन आय

अभी तक हमने व्यष्टि अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले प्रमुख फलनों का विवेचन किया है। लेकिन आधुनिक युग में समष्टि अर्थशास्त्र के अध्ययन का महत्त्व भी काफी बढ़ गया है। इसमें मुख्यतया राष्ट्रीय

आय के निर्धारण का विवेचन किया जाता है जिसमें उपभोग फलन , बचत-फलन, विनियोग फलन आदि का उपयोग किया जाता है। उपभोग फलन में उपभोग राष्ट्रीय आय के फलन के रूप में दर्शाया जाता है $C = C_0 + by$ एक उपभोग फलन है, यहां C = उपभोग व Y = राष्ट्रीय आय तथा b = उपभोग की सीमांत प्रवृत्ति (MPC) है।

यदि $C = 100 + 0.9\,Y$ हो तो $Y = 0$ पर भी उपभोग = 100 होगा। MPC = 0.9 का अर्थ है कि आय के एक इकाई बढ़ने से उपभोग 0.9 इकाई बढ़ता है।

राष्ट्रीय आय = $Y = C + I + G$ होती है, और संतुलन आय उस बिंदु पर निर्धारित होती है जहां $C + I + G$ की रेखा 45^0 की रेखा को काटती है। यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

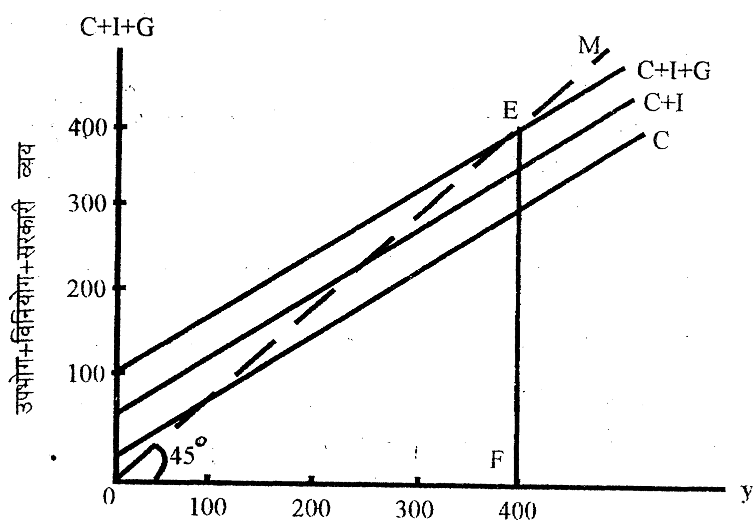
उदाहरणः— यदि $Y = C + I + G$ हो, $C = 25 + 0.75\,Y$, $I = I_0 = 50$ तथा $G = G_0 = 25$ हो तो रेखाचित्र पर संतुलन आय दर्शाइए।

हलः समग्र मांग = $C + I + G = 25 + 0.75Y + 50 + 25 = 100 + 0.75Y$

$C = 25 + 0.75Y$ के लिए उपभोग फलन का रेखाचित्र बनाने के लिए निम्न अंकों का प्रयोग करें:

तालिका 2.11

Y =	0	100	200	400	
C =	25	100	175	325	
C + I + G =	100	175	250	400	संतुलन-आय का बिंदु



चित्र 2.10 **राष्ट्रीय आय का निर्धारण**

चित्र 2.10 में OM रेखा 45^0 की रेखा है। इस पर प्रत्येक बिंदु की लंबवत् दूरी (vertical distance) = क्षैतिज दूरी (horizontal distance) = आय के होती है। इससे समग्र पूर्तिवक्र भी कहा जाता है।

c रेखा उपभोग व आय के सम्बन्ध पर आधारित है।

C + I में उपभोग व विनियोग आते हैं, और C + I + G समग्र मांग रेखा है इसमें उपभोग, विनियोग व सरकारी व्यय तीनों आते हैं

यह 45° की रेखा को E बिन्दु पर काटती है और संतुलन आय = 400 इंच होती है। यह चित्र में OF राशि से दिखायी गयी है।

C + I रेखा C रेखा से I दूरी पर C रेखा के समानान्तर होती है।

C + I + G रेखा C + I रेखा से G दूरी पर इसके समानांतर चलती है।

इकाई के अन्त में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तर का मिलान करें।

बोध प्रश्न 7. Y= C + I + G दिये होने पर

$C = C_o + by$

$I = I_o$

$G = G_o$ तथा $C_o = 135, I_o = 75, G_o = 30$ एवं $b = 0.8$ होने पर

चित्र पर संतुलन आय दर्शाए यहां MPC कितनी हैं ? इसका आर्थिक आशय क्या हैं ?

2.9 सारांश

अर्थशास्त्र में विभिन्न प्रकार के चरों एवं इनमें परस्पर सम्बन्धों को व्यक्त कने के लिए फलन का सहारा लिया जाता है। फलन को रेखाचित्र पर प्रदर्शित कर वक्र, प्राप्त होता है जैसे मांग वक्र, पूर्ति वक्र, कुल आय वक्र, लागत वक्र आदि। अन्य बातों को स्थिर मानकर एक वस्तु की विभिन्न सम्भावित कीमतों पर मांग की विभिन्न मात्राओं को प्रदर्शित किया जाता है लो उसे मांग फलन कहते हैं। मांग वक्र का एक निरन्तर घटता हुआ फलन होता है। मांग-फलन का स्वरूप रैखिक व आयताकार हाइपरबोला के अलावा कभी-कभी पैराबोला चर घातांकीय लघुगणकीय भी हो सकता है। इसी प्रकार पूर्ति-फलन में अन्य बातों को यथास्थिर रखकर एक समय में एक वस्तु की विभिन्न सम्भावित कीमतों पर पूर्ति की विभिन्न मात्राएं देखी जाती है। मांग फलन की भांति पूर्ति फलन के भी विभन्न रूप हो सकते है।

मांग फलन की ही भांति अर्थशास्त्र में कुल आगम (Total revenue) फलन का भी अत्यन्त महत्व है इसे कीमत (p) तथा बिक्री की मात्रा (x) को गुणा करके प्राप्त किया जाता है। कुल आगम फलन से औसत आगम तथा सीमान्त आगम फलन एवं वक्र ज्ञात किये जा सकते हैं। कुल लागत, औसत लागत एवं सीमान्त लागत फलनों एवं रेखाचित्रों को भी स्पष्ट किया गया है। कुल लागत फलन के भी कई रूप हो सकते हैं जैसे रैखिक, पैराबोला त्रिघाती फलन, चरघातांकीय फलन आदि। फलनों की इस श्रृंखला में इस इकाई में उत्पादन फलन एवं वक्र, उत्पादन सम्भावना वक्र, उपयोगिता फलन की चर्चा की गई है।

इसी प्रकार समष्टि अर्थशास्त्र के क्षेत्र में उपयोग-फलन, बचत फलन, एवं विनियोग फलन की चर्चा की गई है। एक उदाहरण द्वारा राष्ट्रीय आय निर्धारण के संतुलन बिन्दु की चर्चा भी की गई है।

2.10 शब्दावली (Key words)

कुल आय अथवा कुल आगम	Total Revenue
अधिमान	Preferences
निश्चित फलन	Expliat Function
सन्तुलन	Equilibrium
नत्तोदर	Concave
अण्डाकार	Elliptic
वृत्ताकार	Circular
तटस्थता वक्र	Indifference Curve
लम्बवत	Vertical
क्षैतिज	Horizonal

2.11 विविध प्रश्न

प्रश्न 1. निम्नलिखित फलनों में मांग फलन व पूर्ति फलन घटाइये तथा चित्रों द्वारा सन्तुलन कीमत व सन्तुलन मात्राएं ज्ञात कीजिए।

(i) $x = 130 - 4P$

(ii) $P = 10 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{100}$

प्रश्न 2. उत्पादन सम्भावना वक्र खीचिए व xay की अधिकतम मात्राएं ज्ञात कीजिए।

$(x - 30)(y - 15) = 150 \ (x < 30)$

प्रश्न 3. तटस्थता वक्र के फलन के विभिन्न रूप किस प्रकार के होते है।

प्रश्न 4. राष्ट्रीय आय के निर्धारण का मॉडल लिखिए।

2.12 प्रश्न के उत्तर

बोध प्रश्न 1

(1) $p = 1$ तथा मांग की मात्रा = पूर्ति की मात्रा = 3 इकाई

(संकेत $p^2 + 4p - 5 = 0 \quad \therefore (P + 5)(p - 1) = 0$

अतः यहां पर $p = 1$ कीमत की स्वीकार्य है; जिस पर मांग या पूर्ति की मात्रा $(x) = 3$ होती।)

(2) रैखिक, आयताकार हाइपरबोला, पैराबोला, चरघातांकीय व लघुगणकीय।

(3) $x(p + c) = 0$, यह मांग-फलन आयताकार हाइपरबोला को उत्पन्न करेगा जिसका केन्द $x = o$ व $p = -c$ पर होगा।

बोध प्रश्न 2

(1) $TR = 10X - X^2$

$MR = 10 - 2x$

TR के लिए—निम्न आंकड़ों का प्रयोग करिए।

x-अक्ष पर x =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y-अक्ष पर TR =	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
y-अक्ष पर AR =	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y-अक्ष पर MR =	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

बोध प्रश्न 3

(i) रैखिक, (ii) पैराबोलिक या द्विघाती (Quadratic)

(ii) पावर-फलन (चूँकि घातांक में स्थिर राशि है)

(iii) त्रिघाती फलन

(2) $AC = \frac{35}{Q} + 5 - 2Q + 2Q^2$

$MC = 5 - 4Q + 6Q^2$

तथा $TC = 35 + 5Q - 2Q^2 + 2Q^3$ (दिया हुआ है)

Q =	0	1	2	3	4	5
(i) TC =	35	40	53	86	151	160
(ii) AC =	-	40	$26\frac{1}{2}$	$28\frac{2}{3}$	$37\frac{3}{4}$	52
(iii) MC =	5	7	21	47	85	135

बोध प्रश्न 4

$TP_L = 10^L + 10L^2 - L^3$

$AP_L = 10 + 10L - L^2$

$MP_L = 10 + 20L - 3L^2$

L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TP_L =	19	52	93	136	175	204	217	208	171	100
AP_L =	19	26	31	34	35	34	31	26	19	10
MP_L =	27	38	43	42	35	22	3	-22	-053	-90

इनको ग्राफ पर अंकित करने से TP_L, AP_L व MP_L बनेंगे।

बोध प्रश्न 5

इसका चित्र अण्डाकार होगा।

आइसक्रीम x की अधिकतम मात्रा = 4.4 इकाई

आइसक्रीम y की अधिकतम मात्रा = 7 इकाई होगी।

केवल धनात्मक मूल्य लेने पर, x व y के निम्न जोड़े अंकित किये जा सकते हैं।

बोध प्रश्न 6

1 $(x + 1)(y + 2) = 8$ तथा $(x + 1)(y + 2) = 12$ के लिए दो तटस्थता-वक्र बनाएं।

2a = 8 पर; प्रथम वक्र में $x = 0$ पर $y = 6$ होगा तथा $y = 0$ पर $x = 3$ होगा।

2a = 12 पर; द्वितीय वक्र $x = 0$ पर $y = 10$ होगा तथा $y = 0$ पर $x = 5$ होगा।

बोध प्रश्न 7

1 संतुलन आय = y = 1200

$$y = C + I + G$$

$$= C_0 + by + I_0 + G_0$$

$$= 135 + 0.8y + 75 + 30 = 240 + 0.8y$$

$\therefore$ Y = 240 + 0.8y $\qquad \therefore$ 0.2y = 240

$$Y = \frac{240}{0.3} = 240 \times 5 = 1200$$

MPC = 0.8, इसका अर्थ है कि आपके एक इकाई बढ़ने से उपभोग में 0.8 इकाई की वृद्धि होती है।

विविध प्रश्न

उपभोग में 0.8 इकाई की वृद्धि होती है।

(1) पहला फलन मांग-वक्र व दूसरा पूर्ति-वक्र है। कीमत 25 पर मांग व पूर्ति की मात्राएं = 30 है।

(2) x की अधिकतम मात्रा 20 व y की 10 होगी।

(3) (i) आयताकार हाइपरबोला, (ii) वृत्त प्रणाली (iii) पैराबोलिक प्रणाली।

(4) $y = C + I + G$ जहां $C = C_0 + by$, $i = I_0$ तथा $G = G_0$ होता है।

2.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

(1) R.G.D. Allen, Mathematical Analysis for Economists. Ch. V.

(2) J.M. Joshi, Theory of value, distribution and welfare Economics, 4th Edition 1983. (Relevant chapters.)

(3) Edward T. Dowling, Mathematics for Economists, chapter 2, Economic Application of Graphs and Equations

(4) Gould and Lazear, Ferguson & Gould's Micro Economic Theory, 6th Edition 1989, relevant chapters for various functions and their Economic applications.

इकाई 3
सीमांत तथा निरंतरता

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

- सीमांत की धारणा से परिचित हो जाएंगे।
- फलन की सीमा का अर्थ समझ सकेंगे।
- बायीं ओर की सीमा एवं दायीं ओर की सीमा में भेद समझ सकेंगे।
- निरंतरता एवं फलन की निरंतरता का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे।
- अनिरंतरता तथा इसके विभिन्न प्रकारों को समझ सकेंगे।

3.1 प्रस्तावना

अवकलन का अधययन करने से पूर्व हमें सीमांत एवं निरंतरता का ज्ञान होना आवश्यक है। सीमांत की धारणा एक सापेक्ष धारणा है। इस इकाई में बायीं ओर की सीमा एवं दायीं ओर की सीमा का अर्थ एवं इनमें अंतर भी स्पष्ट किया जाएगा। इसके बाद सीमांत के कुछ निश्चित प्रमेय या गुणों की चर्चा की जाएगी जिनके प्रयोग से जटिल फलनों की सीमा ज्ञात करने में मदद मिलेगी।

सीमांत की धारणा के विवेचन के बाद इस इकाई के भाग 3.3 में निरंतरता या सांतत्य (continuity) पर विचार किया जाएगा। इससे आगे चलकर फलन का अवकलन निकालने में मदद मिलेगी। भाग 3.4 में अनिरंतरता या असांतत्य (discontinuity) की स्थिति पर चर्चा की जाएगी एवं भाग 3.5 में निरंतरता, अवकलनीयता व सीमा चित्र द्वारा स्पष्ट की जाएगी।

3.2 सीमांत (Limits)

3.2.1 सीमांत की मूलभूत धारणा का सरल परिचय

अवकलन की प्रक्रिया को ठीक से समझने के लिये सीमांत व निरंतरता का ज्ञात आवश्यक माना गया है। यहां सीमा के विचार का सरल परिचय दिया जाता है। नीचे दो प्रकार के उदाहरण दिये गये हैं जिनमें वास्तविक संख्याओं (real numbers) को रखा गया है।

(i) 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, ...,

(ii) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, ...

ये दोनों बढ़ते हुए क्रम में अंकों को दर्शाते हैं, एक में पूर्णांक है और दूसरे में भिन्नें हैं। प्रथम क्रम लगातार बढ़ते रहने पर अनंत (infinity) तक पहुंचेगा और दूसरा क्रम बढ़ते-बढ़ते एक समीप पहुंचेगा। इसलिए प्रथम क्रम की सीमा ∞ तथा दूसरे की 1 कही जा सकती है।

अब घटते हुए क्रमों के दो उदाहरण लीजिए:

(i) 1, 0, -1, -2, -3, -4, ...

(ii) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, ...

इनमें से प्रथम क्रम बढ़ते-बढ़ते $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होगा और दूसरा क्रम 1 की ओर प्रवृत्त होगा। अतः प्रथम क्रम की सीमा $-\infty$ तथा द्वितीय क्रम की 1 मानी जायेगी।

कुद दशाओं में सिरीज न तो ∞ की ओर जाता है, न $-\infty$ की ओरए और न किसी और अंकीय सीमा की तरफ जाता है। बल्कि उसमें उतार-चढ़ाव आते हैं (oscillates) जैसे

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad 3, \quad \frac{5}{4}, \quad 5, \quad \frac{7}{6}, \quad 7, \quad \frac{9}{8}, \quad \ldots$$

अतः इस प्रकार के संख्याओं के क्रम की प्रवृत्ति किसी सीमा की ओर नहीं होती, अर्थात् इनके लिए कोई सीमा नहीं पायी जाती।

3.2.2 एक फलन की सीमा के उदाहरण

उपर्युक्त उदाहरणों से सीमा का मूलभूत विचार स्पष्ट हो जाता है। बि हम कुछ फलनों की सीमा के उदाहरण देंगे जिससे आगे चलकर सीमा की परिभाषा स्पष्ट हो सकेगी। इस संबंध में आवश्यकतानुसार चित्रों का उपयोग किया जायेगा।

उदाहरण 1.

f (x) अथवा y = 3x + 4 हो, तो lim f (x) ज्ञात कीजिए। x→0

प्रथम स्थिति	द्वितीय स्थिति
हलः— x के 1 व इससे क्रमशः कम धनात्मक मूल्यों पर फलन के मूल्य (शून्य की ओर चलने पर)	x से -1 व इससे क्रमशः अधिक ऋणात्मक मूल्यों पर फलन के मूल्य (शून्य की ओर चलने पर)
f (i) = 7	f (-1) = 1
f (½) = 5½	f (-½) = 2½
f (¼) = 4¾	f (-¼) = 3¼
$f(\frac{1}{1000}) = 4\frac{3}{1000}$	$f(-\frac{1}{1000}) = 3\frac{997}{1000}$
आदि, आदि।	आदि, आदि।

यहां एक बार हम x = 1, ½, ¼ व $\frac{1}{1000}$, अर्थात् क्रमशः घटते हुए धनात्मक मूल्यों पर फलन का मूल्य ज्ञात करते हैं। x को शून्य की ओर प्रवृत्ति होने पर फलन, अर्थात् y या f (n), की प्रवृत्ति स्पष्टतया 4 की ओर होती है। इसी प्रकार द्वितीय स्थिति में x = -1, -½, -¼ व $\frac{1}{1000}$, लेने पर, अर्थात् -1 से ऋणात्मक रूप में आगे शून्य की ओर प्रवृत्त होने पर, पुनः f (n) की प्रवृत्ति 4 की ओर होती है।

स्मरण रहे कि ½ राशि तो 1 से कम होती है, लेकिन -½ राशि -1 से अधिक होती है। इसलिए x के लि -1 से 0 की तरफ जाते समय हमें -½, ¼ व $\frac{1}{1000}$, जैसे मूल्यों से गुजरना होगा।

अतः x→0 पर y या f (x)→4 होगा। → का अर्थ है इसकी ओर जाने की प्रवृत्ति।

उदाहरण 2.

यदि f (x) अथवा = -1-$\frac{1}{x}$ हो तो lim f (x) ज्ञात कीजिए।

$x \to \infty$

हलः— प्रथम विधि—यहां भी x के क्रमशः बढ़ते मूल्यों पर फलन f (x) के मूल्यों पर नजर डालने पर हमें आवश्यक सीमा का पता लग जायेगा जैसेः

$f(1) = 0$ [फलन में $(1-\frac{1}{x})$ में x = 1 रखने पर]

$f(5) = \frac{4}{5}$

$f(10) = \frac{9}{10}$

$f(100) = \frac{99}{100}$

$f(10{,}000) = \frac{9{,}999}{10{,}000}$

अतः स्पष्ट है कि यहां $x \to \infty$ से $f(x) \to 1$ होगा। अर्थात् x के अनंत की ओर प्रवृत्त होने पर फलन 1 की ओर प्रवृत्त होता है।

इस सरल प्रस्तुतीकरण में सामान्य समझ से काम चल जाता है, कहीं भी दुरूहता व कठिनाई का सामना नहीं करना पड़ता।

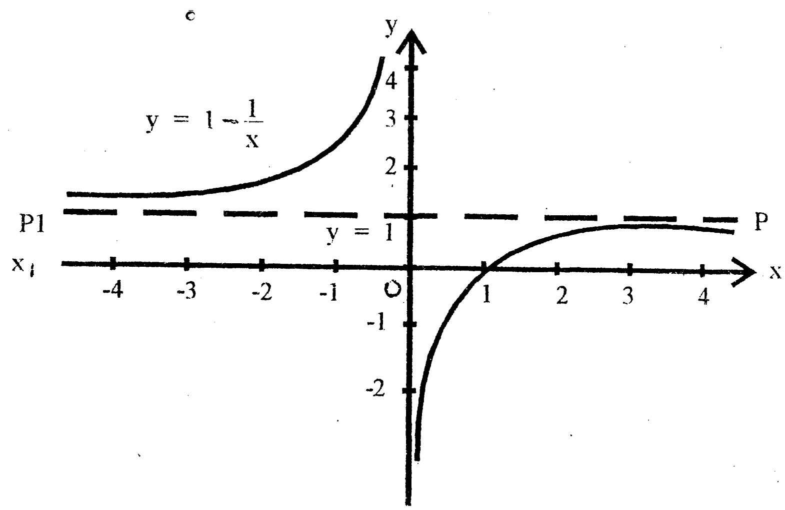
इस प्रश्न को ग्राफ की सहायता से स्पष्ट किया जा सकता है। यहां $x \to \infty$ व $x \to -\infty$ दोनों के लिए फलन y की सीमा 1 के बराबर आती है। f (x) या $y = 1 - \frac{1}{x}$ में x के विभिन्न मूल्यों पर y के मूल्य नीचे लिखे गये हैं।

x के धनात्मक मूल्य **तालिका 3.1**

प्रथम क्रम	x	1	2	3	4	5	6	7	...
	y	0	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{6}{7}$,	...

x के ऋणात्मक मूल्य **तालिका 3.2**

द्वितीय क्रम	x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...
	y	2	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$,	$\frac{7}{6}$,	$\frac{8}{7}$,	...



चित्र 3.1: आयताकार आते परवलय

चित्र 3.1 में $y = 1 - \frac{1}{x}$ एक आयताकार अति परवलय को प्रदर्शित करता है। अंकों के प्रथम क्रम को देखने से स्पष्ट होता है कि x के बढ़ते जाने पर y के बढ़ते जाने पर y एक के समीप जाता है। इसी प्रकार अंकों के दूसरे क्रम से स्पष्ट होता है कि x के घटते जाने पर y पुनः एक के समीप जाने की प्रवृत्ति दर्शाता है। y = 1 में से एक P_1P रेखांकित क्षैतिज रेखा ox- अक्ष के समानांतर डाली गयी है। हम देखते हैं कि x के बढ़ते जाने पर नीचे वाला वक्र 1 के समीप पहुंचता जाता है। इसी प्रकार x के घटते जाने पर ऊपर वाला वक्र भी 1 के समीप पहुंच जाता है। x=1 पर y=0 होता है। अतः नीचे वाला वक्र ox- अक्ष

को $x = 1$ पर काटता है। कहने का तात्पर्य यह है कि x के अनंत या ∞ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन $y = 1 - \frac{1}{x}$ में 1 की ओर जाने की प्रवृत्ति होती है। फलन का ग्राफ इसी तथ्य को दर्शाता है। जब x धनात्मक रूप में बढ़ता है तो वक्र के बायें से दायें बढ़ता जाता है और $y = 1$ पर डाली गयी क्षैतिज रेखा P_1P के समीप पहुंचने की प्रवृत्ति बतलाता है।

इसी प्रकार दूसरे क्रम में जब x ऋणात्मक रूप में $-\infty$ की तरफ चलता है तो y के मूल्य पुनः 1 की सीमा की ओर चलते हैं। इसलिए हम कह सकते हैं कि $x \to -\infty$ पर भी फलन $y \to 1$ ही होता है। इस स्थिति में ऊपर का वक्र दायें से बायें आता है और P_1P क्षैतिज रेखा के समीप पहुंचने का प्रयास करता है।

अतः x के ∞ या $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन y या $f(x) = 1$ की ओर प्रवृत्त होता है। अतः यहां फलन की सीमा 1 के बराबर होती है।

बोध प्रश्न 1. x व y के मूल्यों के क्रम (sequence) पर नजर डाल कर फलन की सीमा इंगित करें।

(1) यदि $y = f(x) = x^2 + 4x - 2$ हो तो $x \to \infty$ व $x \to -\infty$ पर फलन की सीमा (limit or function) ज्ञात कीजिए।

(2) यदि $y = x^3 - 3x - 2$ हो तो $x \to \infty$ व $x \to -\infty$ पर फलन की सीमा ज्ञात कीजिए।

(3) यदि $y = \frac{3}{x}$ हो तो (i) $x \to 0$ पर तथा (ii) $x \to \infty$ पर फलन की सीमा ज्ञात कीजिए।

[संकेतः (i) $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$ आदि पर तथा $x = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{10}$ आदि पर y ज्ञात करके देखिए]

3.2.3 सीमा की परिभाषा : बायीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा का अर्थ

हमने अभी तक किसी भी फलन की सीमा को ज्ञात करने के लिए संख्याओं के क्रम की सीमा की विधि का प्रयोग किया है। x को किसी निर्धारित नियम के अनुसार विभिन्न मूल्य दिये जाते है, और उन पर y के मूल्यों का क्रम देखा जाता है जिनके आधार पर फलन की सीमा ज्ञात की जाती है। अतः सीमा की धारणा एक सापेक्ष धारणा (relative concept) होती है। एक स्वतंत्र चर x के किसी दिये हुए तरीके से बदलने पर y की संख्याओं का क्रम किसी विशेष मूल्य की ओर अग्रसर होता है। अतः फलन की सीमा में यह बतलाया जाता है कि x के अमुक राशि की ओर प्रवृत्त होने पर y अथवा फलन के अमुक राशि के बराबर होने की प्रवृत्ति होती है।

सीमा की परिभाषाः यदि $f(x)$ x चर का फलन होता है तो x की सीमा a पर $f(x)$ की सीमा संख्या A उस स्थिति में मानी जाती है, जबकि किसी ऐच्छिक रूप से चुनी हुई धनात्मक संख्या ε (एप्सिलोन ग्रीक अक्षर epsilon) (जो कितना भी छोटा हो, लेकिन शून्य नहीं होता), के लिए एक संख्या δ (डेल्टा delta) ऐसी होती है जो शून्य से अधिक होती है, ताकि—

$|f(x) - A| < e.$ ... (1)

x के सभी मूल्यों पर जहां,

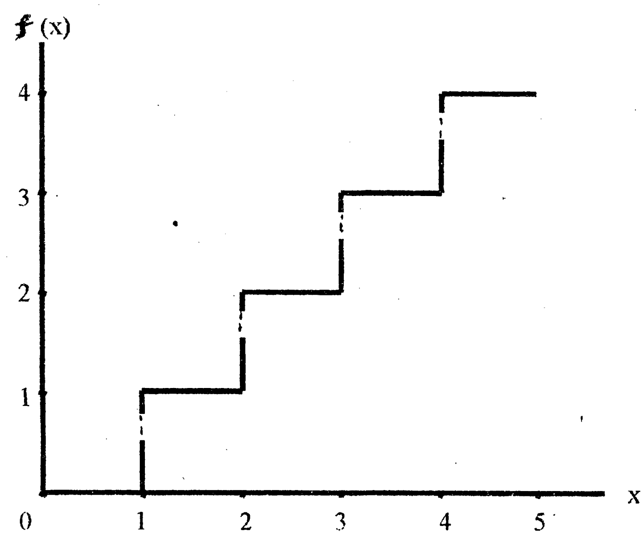
$0 < |x - a| < \delta$ की शर्त लागू होती है। ... (2)

सीमाओं के इस विवेचन में x की सीमा a एवं f (x) की सीमा A रखी गयी है। हमने यहां 0 < | x - a | की शर्त इसलिए जोड़ी है कि x = a न हो। यहां (i) का अर्थ है कि फलन के मूल्य व फलन की सीमा का अंतर (निशान छोड़ने पर) एक बहुत छोटी धनात्मक संख्या e (एप्सिलोन) से भी कम होता है। इसी प्रकार | x - a| (निशान छोड़ने पर) 0 से अधिक (अर्थात् x = a नहीं होता) लेकित यह δ से कम होता है। अब हम $x \to a$ पर f (x) की सीमाओं की चार दशाओं पर विचार करते हैं। यहां हमें f (x) के मूल्यों की प्रवृत्ति का पता लगाना है जब x उत्तरोत्तर एक दिये हुए मूल्य x= a के अधिकाधिक समीप चलता जाता है। लेकिन सीमा की इस प्रक्रिया में कभी भी x = a नहीं होता।

यहां पर हमें बांयीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा का अंतर समझना चाहिए जिसका सीमा के अध्ययन में काफी महत्त्व माना गया है।

बायीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा (Left-side limit and Right-side limit):

मान लीजिए हम f (x) = [x] = x में सबसे बड़ा अंक, का निम्न ग्राफ लेते हैं। जो सीढ़ीनुमा फलन (step-function) का सूचक होता है। ऐसा प्रायः डाक-व्यय में देखा जाता है जैसे वर्तमान में अनरजिस्टर्ड पार्सल के प्रथम ½ किलो वजन पर डाक-व्यय 4 रु० ½-1 किलो तक 8 रु०, 1-1½ किलो तक 12 रु० तथा आगे यही क्रम जारी है। ऐसी स्थिति में निम्न किस्म के सीढ़ीनुमा फलन का प्रयोग होता है।



चित्र 3.2 सीढ़ीनुमा फलन

मान लीजिए हम यहां पर $x \to 3$ पर फलन f (x) की सीमा निकालना चाहते हैं।

यहां <u>बायीं ओर की सीमा</u> को $x \to 3^-$ से सूचित करते हैं; अर्थात् यह x के 3 से कम वाले मूल्यों जैसे 1 व 2 से 3 की तरफ चलती है। चित्र से स्पष्ट होता है ऐसी स्थिति में f (x) की सीमा 2 आती है। इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

इसी प्रकार <u>दायीं ओर से चलने का</u> अर्थ है x = 5 से x = 4 व x = 3 की तरफ आना। इसे $x \to 3^+$ भी कहते हैं, क्योंकि यहां x के 3 से अधिक वाले मूल्यों से चल कर बायीं तरफ आते जाते है। और x=3 पर f (x) या फलन की सीमा देखते हैं जो यहां पर 3 होती है।

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैः

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3$$

इस प्रकार बायीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा में अंतर हो सकता है। स्मरण रहे कि ऐसी स्थिति में $\lim_{x \to 3} f(x)$ परिभाषित नहीं होती। अतः बायीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा में भेद समझना बहुत आवश्यक है। पुनः यह स्मरण रहे कि बायीं ओर की सीमा में बायें से दायें चलते हैं और दायीं ओर की सीमा में दायें से बायें आते हैं।

अब हम $\lim_{x \to a} f(x)$ की चार स्थितियों को चित्र द्वारा स्पष्ट करते हैं

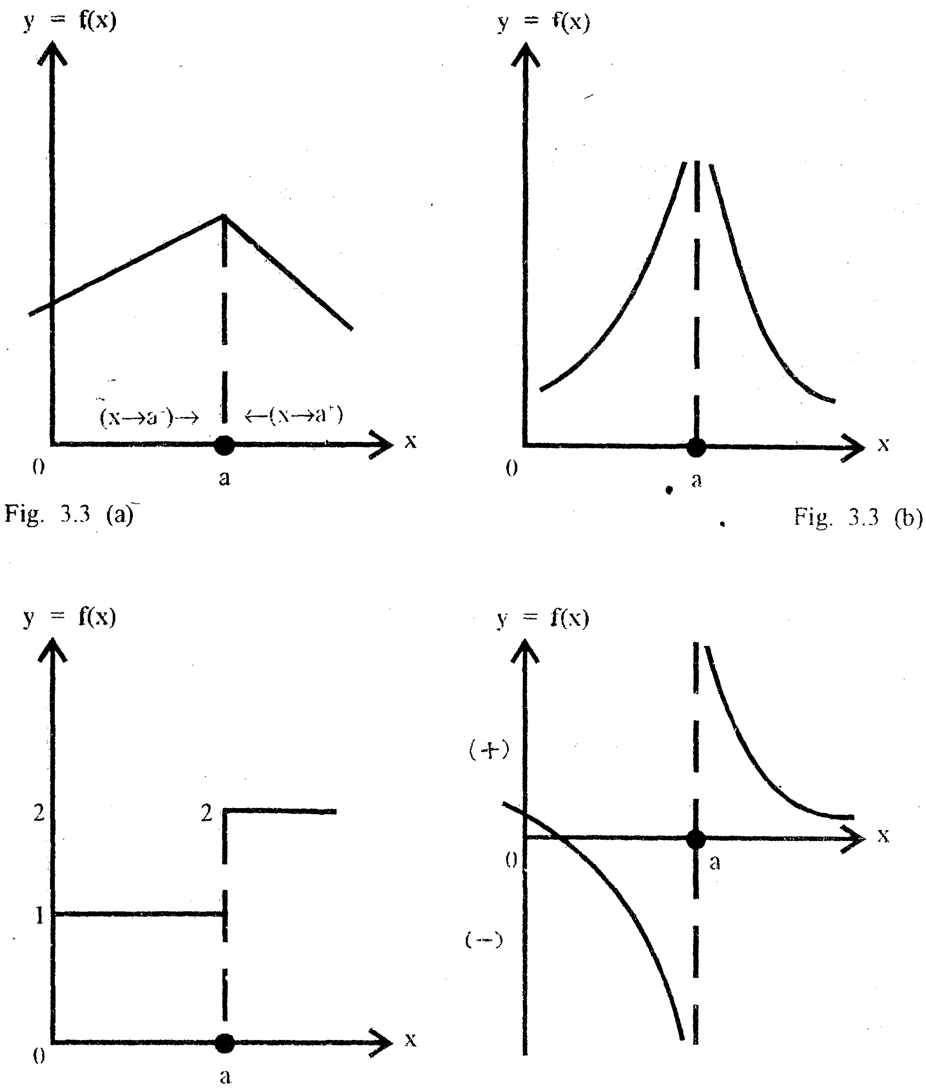


Fig. 3.3 (c) Fig. 3.3 (d)

चित्र 3.3 $x \to a$ की स्थिति में y या $f(x)$ की सीमा की चार दशाएं

स्पष्टीकरणः चित्र 3.3 के (a) भाग में $x \to a^+$ लेने पर, अर्थात् a से अधिक के मूल्यों से चलकर दायीं तरफ से बायीं तरफ आने पर

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lambda$$

λ (लैंबडा) एक परिमित राशि (finite value) के बराबर होती है

$x \to a^+$

इसी प्रकार a से कम वाले मूल्यों से बायें से दायें चलने पर

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lambda$$

ऐसी स्थिति में हम कह सकते हैं कि

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$$

चित्र 3.3 (b) में $x \to a^+$ व $x \to a^-$ दोनों दशाओं में f(x) या फलन का मूल्य अनंत (infinity) की ओर जाता है। अर्थात् $x \to a$ पर फलन की सीमा अनंत होती है।

चित्र 3.3 (c) में बायीं ओर की सीमा अथवा $x \to a^-$ के लिए f (x) की सीमा 1 व दायीं ओर की सीमा, अथवा $x \to a^+$ के लिए f (x) की सीमा 2 होती है जो एकदूसरे से भिन्न होती है।

चित्र 3.3 (d) में बायीं ओर की सीमा अथवा $x \to a^-$ के लिए f (x) की सीमा $-\infty$ तथा दायीं ओर की सीमा अथवा $x \to a^+$ के लिए f (x) की सीमा ∞ होती है।

उदाहरणः हल कीजिए

(1) यदि $f(x) = [\frac{(1+x)^2 - 1}{x}]$ हो तो

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

निकालिए

हलः

$$f(x) = [\frac{(1+x)^2 - 1}{x}] = \frac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x+2) = 2$$

उदाहरण

(2) यदि $y = \frac{(1+x^2)}{1-x}$ हो तो

$$\therefore \quad \lim_{x \to} y$$

ज्ञात कीजिए।

हलः

$$y=\frac{1+x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)}=1+x \text{ हो तो}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}(1+x)=2$$

उदाहरण

(3) $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ हो तो

$$\therefore \lim_{x\to\infty} y$$

ज्ञात कीजिए।

हलः

अंश में हर का भाग देने पर

$$y=2+\frac{3}{x+1}$$

यहां अंश में x नहीं रह गया है।

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left[2+\frac{3}{x+1}\right]$$

$$=2 \qquad (\because \frac{3}{x+1}\to 0 \text{ जब } x\to\infty)$$

बोध प्रश्न 2

(1) यदि $y=\dfrac{(x^2+x-56)}{x-7}$, जहां $x\neq 7$ तो बायीं तरफ की सीमा व दायीं तरफ की सीमा निकालिए जब $x\to 7$ हो तथा इन उत्तरों से क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $x\to 7$ पर फलन की कोई सीमा है?

[संकेत अंश = (x+8) (x-7) है; अतः y = x+8 हो जाता है।]

(2) यदि $y=5-\dfrac{1}{x}$ (जहां $x\neq 0$)

तो (i) $\lim_{x\to\infty} y$ तथा

(ii) $\lim_{x\to -\infty} y$

(3) यदि $y=\frac{2x+1}{x-1}$ हो (जहां $x \neq 1$)

तो $\lim_{x\to 1} y$ ज्ञात कीजिए

[संकेतः इसके $x\to 1^+$ व $x\to 1^-$ पर विचार करें, एवं अंश में हर का भाग दें]

(4) यदि $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}$ हो तो x=a पर फलन का मूल्य (Value of the function) व $x\to a$ पर फलन की सीमा (limit of the function) में भेद करें।

3.2.4 सीमा के प्रमेय (थ्योरम) या गुण (properties)

हमने ऊपर देखा कि फलन की सीमा निकालने के लिए हम यह देखते हैं कि जब x किसी मूल्य की ओर जाता है तो फलन या f (x) किस ओर जाता है। इससे हमें सीमा का मूल्यांकन करने में मदद मिलती है। लेकिन सीमा के कुछ निश्चित प्रमेय या गुण होते हैं जिनका उपयोग करने से हमें जटिल फलनों की सीमा ज्ञात करने में भी आसानी होती है। ये नीचे दिये जाते हैं।

<u>एक फलन की स्थिति में सीमा के थ्योरमः</u> जब $y = f(x)$ पर विचार किया जाता है।

थ्योरम I यदि $y = a + b$ हो तो $\lim_{x\to N} y= aN + b$

(यहां a व b स्थिर राशियां है।)

II यदि $y = f(x) = b$, तब $\lim_{x\to N} y = b$

इसका अर्थ है कि स्थिर फलन की सीमा फलन में दी हुई स्थिर राशि के बराबर होती है।

III यदि $y = x$ हो तो $\lim_{x\to N} y = N$

यदि $Y = x^k$ हो तो $\lim_{x\to N} y = N^k$

उदाहरण

$y = x^3$ हो तो $\lim_{x\to 2} y = (2)^3 = 8$

<u>दो फलनों से संबंधित थ्योरमें</u>

यदि स्वतंत्र चरा x के दो फलन है, $y_1 = f(x)$ व $y_2 = g(x)$ और यदि दोनों फलनों की सीमां इस प्रकार हैः

$\lim_{x\to N} y_1$ L_1 तथा $\lim_{x\to N} y_2 = L_2$ और L_1 व L_2

दो परिमित (finite) संख्याएं है तो निम्न थ्योरम में लागू होंगी।

थ्योरम IV $\lim_{x \to N} (y_1 \pm y_2) = L_1 \pm L_2$

अतः दो फलनों के जोड़ (बाकी) की सीमा उनकी सीमाओं के जोड़ (बाकी) के बराबर होती है।

विशेषतया हम देखते हैं कि

$$\lim_{x \to N} 2y_1 = \lim_{x \to N} (y_1 + y_2) = L_1 + L_1 = 2L_1$$

V (गुण की सीमा का थ्योरम)

$$\lim_{x \to N} (y_1 y_2) = L_1 L_2$$

दो फलनों के गुणा की सीमा उनकी सीमाओं के गुणा के बराबर होती है।

यदि हम इसको फलनों के वर्ग पर लागू करें तो

$$\lim_{x \to N} (y_1\, y_1) = L_1\, L_1 = L_1^{\,2}$$ जो थ्योरम III के अनुरूप है।

VI (भाग फल की सीमा का थ्योरम)

$$\lim_{x \to N} \frac{y_1}{y_2} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$$

दो फलनों के भागफल की सीमा उनकी सीमाओं के भागफल के बराबर होती है। यह आवश्यक है कि L_2 शून्य न हो, अन्यथा भागफल का कोई अर्थ नहीं निकलेगा, अर्थात् L_2 के शून्य होने पर भागफल परिभाषित नहीं होगा।

उदाहरणः यदि $y = \frac{1+y}{2+x}$ हो तो $x \to 0$ पर सीमा निकालिए।

हलः भागफल का नियम लागू करने पर

$$\lim_{x \to 0} (1+x) = 1, \text{ तथा } \lim_{x \to 0} (2+x) = 2$$

$\therefore$ आवश्यक सीमा $= \frac{1}{2}$

स्मरण रहे कि L_1 व L_2 के परिमित संख्याओं के बराबर होने पर ही ये थ्योरम लागू होते हैं। यदि थ्योरम VI मे L_2 गैर शून्य न हो तो हल नहीं पायेगा। इसलिए L_2 का गैर शून्य (non zero) होना आवश्यक है।

3.3 निरंतरता या सांतत्य (continuity)

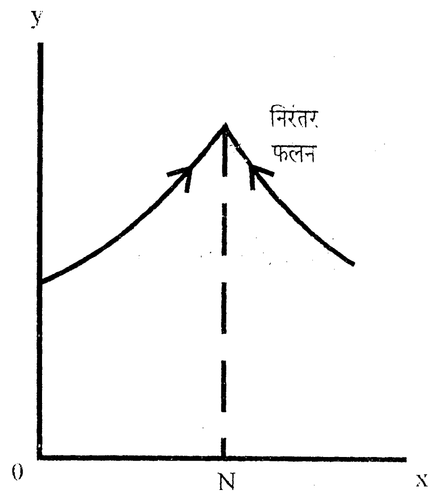
3.3.1 अर्थ व इसकी तीन शर्तें

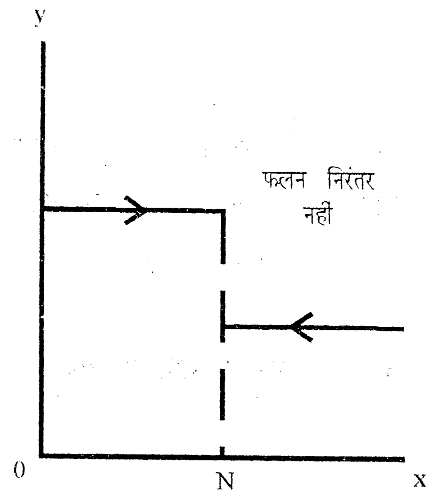
सीमा की धारणा के विवेचन के बाद हम फलन की निरंतरता पर विचार करते हैं। इससे आगे चलकर फलन का अवकलज (derivative) निकालने में मदद मिलेगी जिसमें हमारी रुचि है। अतः सीमा व निरंतरता का ज्ञान प्राप्त करने के बाद फलन का अवकलन करने में सहूलियत रहेगी।

फलन की निरंतरताः जब एक फलन $y = f(x)$ में $x \to N$ पर फलन की सीमा $f(N)$ होती है, जो $x = N$ पर फलन के मूल्य के बराबर होती है तो फलन N बिंदु पर निरंतर माना जाता है।

जो फलन निरंतर होता है (एक विशेष दूरी तक) वह ग्राफ पर पेंसिल व पेन को उठाये बिना खींचा जा सकता है। निरंतरता में किसी तीखे बिंदु (**sharp point**) के होने से अंतर नहीं पड़ता, लेकिन वक्र पर कहीं रिक्तता (**gap**) नहीं आनी चाहिए।

यह बात निम्न चित्रों से स्पष्ट हो जाती है।





चित्र 3.4 (a) **चित्र 3.4 (b)**

चित्र 3.4 (a) में $x = N$ पर वक्र पर एक तीखा बिन्दु आता है, लेकिन फिर भी फलन की निरंतरता बनी रहती है। लेकिन चित्र 3.4 (b) पर $x = N$ पर फलन में दो क्षैतिज रेखाओं के बीच एक रिक्तता आ जाती है जिससे फलन अनिरंतर (Discontinuous) बन जाता है। ऐसा सीढ़ीनुमा फलनों में पाया जाता है। इसीलिए वे अनिरंतर होते हैं।

पीछे चित्र 3.3 (b) व (d) में भी फलन अनिरंतर है। वहां $x = a$ पर अनिरंतरता की स्थिति पायी जाती है।

निरंतरता की तीन शर्तें (Conditions) इस प्रकार होती हैः—एक फलन y अथवा $f(x)$, $x = a$ पर निरंतर तब माना जाता है जब

(1) फलन के डोमेन में $x = a$ होना चाहिए, अर्थात् $f(a)$ का अस्तित्व होना चाहिए,

(2) $x \to a$ पर y की कोई सीमा अवश्य होनी चाहिए।

अर्थात् जब x की प्रवृत्ति a की तरफ हो तब y या $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व होना जरूरी होता है। तथा

(3) वह सीमा $f(a)$ के बराबर होनी चाहिए। जब ये तीनों शर्तें पूरी होती है। तो हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$\lim f(x) = f(a) = f(a)$ [निरंतरता की शर्त] अर्थात $x \to a$ पर $f(x)$ की सीमा $x = a$ पर फलन के मूल्य के बराबर होती है।

उदाहरण

निरंतरता की तीन शर्तों को निम्न फलन के लिए लागू करने ज्ञात कीजिए कि यह फलन निरंतर है या नहीं:

$$Y = f(x) = |x - 2| + 1$$

यहां | | का आशय है कि | x - 2 | का परिणाम धनात्मक (Positive) ही होगा, चाहे x का मूल्य 2 से क हो या 2 से ज्यादा हो। जैसे यहां $x = 1$ पर $y = 2$; $x = 0$ पर $y = 3$, तथा $x = 3$ परभी $y = 2$ तथा $x = 4$ पर भी $y = 3$ होगा, आदि।

फलन में निरंतरता की तीनों शर्तें पूरी होती हैं क्योंकि

(1) $x = 2$ फलन के डोमेन में आता है अर्थात $x = 2$ पर $y = 1$ होने से $f(2)$ का अस्तित्व पाया जाता है;

(2) $\lim_{x \to 2} y = 1$ होती है, चाहे हम $\lim_{x \to 2^-} y$ ले अथवा $\lim_{x \to 2^+} y$ लें,

अर्थात् बायीं ओर की सीमा लें, अपना दायीं ओर की सीमा लें ये दोनों सीमाएं = 1 हैं।

(3) यह सीमा f(2) के बराबर, अर्थात् 1 के बराबर होती है, अर्थात् पर फलन का मूल्य भी 1 के बराबर ही होता है।

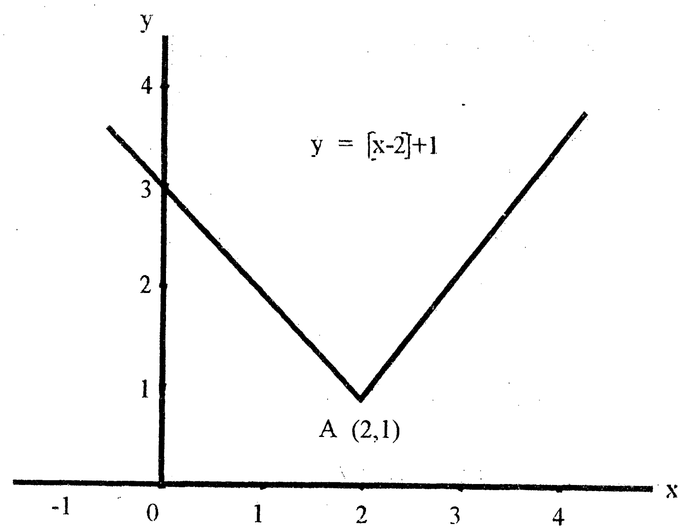
स्मरण रहे कि x = पर फलन में निरंतरता तो है, लेकिन उस बिन्दु पर इसके समतल (smooth) न होने से इसका अवकलन ज्ञात नहीं किया जा सकता।

अवकलन ज्ञात करने के लिए स्पर्श रेखा (tangent) का डाला जाना जरूरी होता है जो तीखे बिन्दु पर सम्भव नहीं होती। उसके लिए विशिष्ट बिन्दु पर समतलता (smoothness) का होना जरूरी होता है। अतः फलन या वक्र में तीखा बिन्दु आने पर भी निरंतरता पायी जा सकती है, हालांकि उस बिन्दु पर अवकलनीयता नहीं होती।

नीचे $y = |x - 2| +$ का चित्र दिया गया है।

तालिका 3.3

x	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	2	3



चित्र 3.5

स्पष्टीकरण—जैसा कि पहले बतलाया गया है | | का अर्थ है कि $|x-2|$ का परिणाम सदैव धनात्मक लिया जाता है। वक्र पर A बिन्दु पर, अर्थात् $x = 2$ पर एक तीखा बिन्दु है। A पर फलन की निरंतरा जारी है, हालांकि इसके समतल (smooth) न होने से स्पर्श रेखा नहीं बन सकती है जिससे $x = 2$ पर इसका अवकलन ज्ञात नहीं हो सकता। अन्य बिन्दुओं पर अवकलन ज्ञात हो सकता है।

3.3.2 फलनों की निरंतरता के उदाहरण

पहला उदाहरण—यदि $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x - 4}$ हो तो बताइए कि क्या $x = 4$ पर फलन निरंतर है ? $x \neq 4$ पर क्या स्थिति होगी।

हल : $x = 4$ पर हर के शून्य होने के कारण यह फलन परिभाषित नहीं है। इसलिये यह $x= 4$ पर अनिरन्तर (discontinuous) है। लेकिन $x \neq 4$ होने पर

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x - 4} = x + 5$$

तथा $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 9$, इसलिए यदि, परिभाषा से,

$f(4) = \lim f(x) = 9$ हो तो $f(x)$, x के सभी मूल्यों पर निरंतर होता है और इसका ग्राफ एक सरल रेखा $y = x + 5$ बनता है।

दूसरा उदाहरण—यदि $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4}$ तो पता करिए कि $x = 2$ और $x = -2$ पर फलन निरंतर है या नहीं। x के अन्य मूल्यों के लिए (जो डोमेन में हैं) क्या फलन निरंतर है ?

हल—$x = 2$ व $x = -2$ पर हर $= 0$ हो जाता है, अतः इन मूल्यों पर फलन परिभाषित नहीं है (function is not define) अतः $x = -2$ व $x = 2$ पर फलन अनिरंतर (discontinuous) है। x इन दोनों मूल्यों पर फलन रिक्तता दर्शायेगा।

लेकिन x के अन्य मूल्यों पर (जो डोमेन में हैं), $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4} = x + 1$ हो जाता है जिससे एक सरल रेखा बनती है। अतः $x = \pm 2$ के अलावा अन्य मूल्यों पर फलन निरंतर है।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न 1. यदि $y = f(x) = x^2 - 7x - 3$ हो तो बताइए कि क्या फलन $x = 4$ पर निरंतर होगी।

प्रश्न 2. यदि $y = f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1}$ तो बताइए कि डोमेन $(-\infty, \infty)$ में फलन निरंतर है या नहीं।

प्रश्न 3. यदि $y = f(x) = \frac{x+2}{x^2+2}$ तो बताइए कि क्या यह फलन x के डोमेन $(-\infty, \infty)$ के बीच निरंतर है ?

3.4 अ निरंतरता या असांतत्य (Discontinuity) की स्थिति

(3) <u>अनिरंतरता की स्थिति कब आती है ? इसकी चार किस्में:–</u>

जब निरंतरता की ऊपर वर्णित तीन शर्तों का उलंघन होता है तो अनिरंतरता (discontinuity) उत्पन्न होती है।

अनिरंतरताएं **चार** प्रकार की होती हैः–

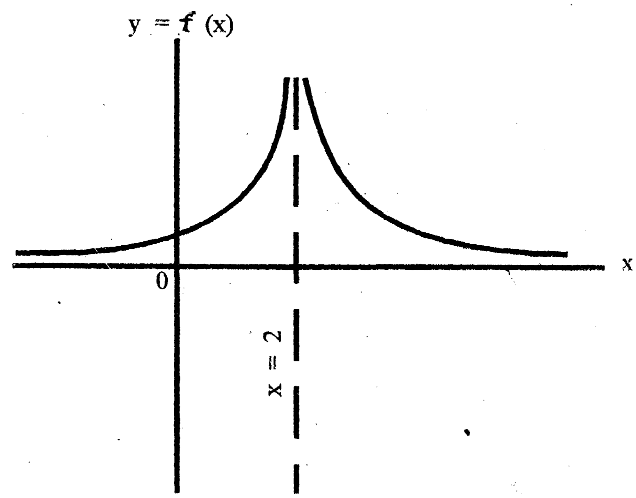
(i) अनंत अनिरंतरता (infinite discontinuity)

एक फलन पर $x = a$ पर अनंत अनिरंतरता तब मानी जाती है

जब $x \to a$ पर $f(x)$ अनंत हो जाता है (धनात्मक या ऋणात्मक रूप में) दूसरे शब्दों में, $f(a)$ परिभाषित नहीं होता है, और $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता।

उदाहरण–$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ में $x = 2$ पर अनंत अनिरंतरता पायी जाती है क्योंकि $x \to 2$ पर $f(x) \to \infty$ है और $f(2)$ परिभाषित नहीं है (चूंकि $x = 2$ रखने पर फलन का हर $= 0$ हो जाता है।) लेकिन $x = 2$ के अलावा x के अन्य मूल्यों पर फलन निरंतरता का गुण रखता है।

इसका ग्राफ निम्न किस्म का होता हैः–



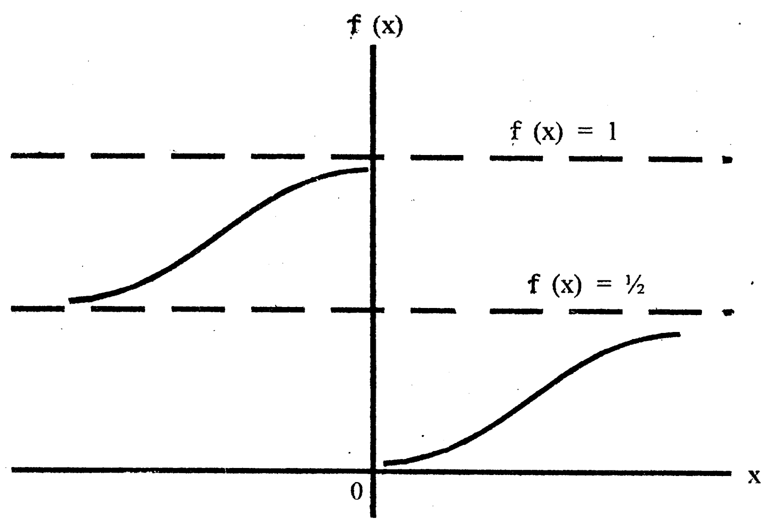
चित्र 3.6 $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ का चित्र

चित्र 2.6 से स्पष्ट है कि $x = 2$ पर फलन में अनंत अनिरंतरता की स्थिति विद्यमान है।

(ii) परिमित अनिरंतरता (Finite discontinuity)—यदि $x = a$ पर फलन का मूल्य तो परिमित होता है, लेकिन इस पर (वह $x = a$ पर) वह अचानक बदल जाता है। दूसरे शब्दों में f(a) तो परिभाषित होता है, लेकिन $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता (यद्यपि, सामान्यतया, दायीं और व बायीं और की सीमाएं होती है और f(a) इनमें से किसी एक के बराबर होता है)।

उदाहरण — $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ में $x = 0$ पर परिमित अनिरंतरता पायी जाती है क्योंकि यहां $\lim_{x \to 0} f(x)$ परिभाषित नहीं है। लेकिन $x = 0$ के अलावा इसके अन्य सभी मूल्यों पर फलन निरंतर होता है

जैसे $x = 1$ पर $f(x) = \frac{1}{3}$ व $x = -1$ पर $f(x) = \frac{2}{3}$ होगा आदि।



चित्र 3.7 $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$

(iii) गायब-बिन्दु अनिरंतरता (missing-point discontinuity)—एक फलन में $x = a$ पर गायब-बिन्दु अनिरंतरता तब होती है जब f(a) परिभाषित नहीं होता, लेकिन $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है।

उदाहरण—$f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ में $x = -4$ पर हर के शून्य हो जाने से f(x) परिभाषित नहीं है। लेकिन $x \neq -4$ पर $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4} = x - 4$ होने पर $\lim_{x \to -4} f(x) = -8$ होती है जिससे

यदि परिभाषा से $f(-4) = \lim_{x \to -4} f(x) = -8$ हो तो x के समस्त मूल्यों पर रेखीय फलन $y = (x - 4)$ पर निरंतरता

लिये हुए होता है। लेकिन x = - 4 पर $f(x)=\frac{x^2-16}{x+4}$ में गायब-बिन्दु अनिरंतरता पायी जाती है।

(iv) खण्डित फलन में अनिरंतरता—मान लीजिए एक कार का मूल्य एक लाख रुपये है और दो कारों का मूल्य दो लाख रुपये, आदि और यह सम्बन्ध $y = x$ से दर्शाया गया है; जहां $x = 1, 2, 3, ...$ आदि में रूप में बढ़ता है। यह फलन खण्डित है। यहां 1 व 2 कारों के बीच, अथवा 2 व 3 के बीच x (कारों) का कोई मूल्य नहीं होता। अतः x के अंकीय मूल्यां पर ही फलन के मूल्य पाये जाते हैं जिससे उनके बीच में रिक्तता या अनिरंतरता आ जाती है।

अर्थशास्त्र में ऐसे सीढ़ी नुमा फलन बहुत लोकप्रिय माने गये हैं। टी०वी० सेटों, सोफा सेटों, रेफ्रिजेटरों आदि की बिक्री में खण्डित सिरीज ही आता है।

बोध प्रश्न 4

प्रश्न 1. यह ज्ञात कीजिए कि निम्न फलनों में x के किस मूल्य या किन मूल्यों पर ये अनिरंतर (discontinuous) हो जाते हैं—

(i) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

(ii) $f(x)=\frac{1}{3^x+1}$

(iii) $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$

(iv) $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$

प्रश्न 2. यदि प्रश्न 11 के (iv) के परिमेय फलन (rational function) $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$ के अंश में हर का भाग देकर भागफलन $(x-1)$ लिख दें, तो क्या उसकी जगह $f(x)=(x-1)$ प्रतिस्थापित किया जा सकता है ? इस सम्बन्ध में आवश्यक कारण दीजिए।

(इसके उत्तर में उत्तर संकेत देखिए)

प्रश्न 3. खण्डित फलन में अनिरंतरता (discontinuity) को स्पष्ट कीजिए।

3.5 निरंतरता, अवकलनीयता व सीमा : चित्र पर

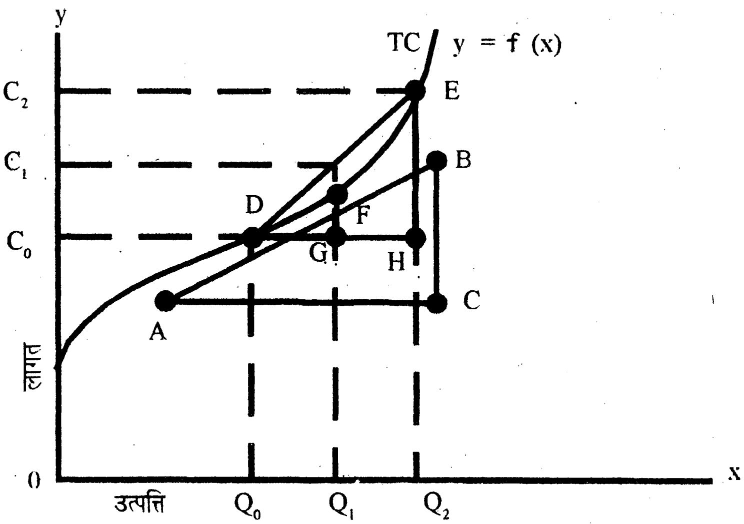
$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ का स्पष्टीकरण

हम पहले बतला चुके हैं कि फलन का अवकलज (derivative) निकालने में सीमांत व निरंतरता के विचारों को आवश्यकता होती है। सीमांत व निरंतरता की चर्चा करने के बाद अब हम यह जानने की स्थिति में आ गये है कि इनसे फलन की अवकलनीयता में किस प्रकार मदद मिलती है।

स्मरण रहे कि अवकलनीयता (differentiation) के लिए फलन में निरंतरता (continuity) व समतलता (somoothness) दोनों गुण जरूरी हैं। निरंतरता अवकलनीयता की आवश्यक शर्त होती है, लेकिन व पर्याप्त शर्त नहीं होती। समतलता उसकी पर्याप्त शर्त मानी जाती है। तीखे बिन्दु (sharp point)

पर एक फलन पर अवकलन सम्भव नहीं होता। अतः **सभी अवकलनीय फलन निरंतर फलन होते हैं, लेकिन सभी निरंतर फलन अवकलनीय फलन नहीं होते। केवल निरंतरता से अवकलनीयता की गारंटी नहीं मिल जाती।** निरंतरता तो केवल यह बतलाती है कि एक फलन में रिक्तता (gap) नहीं है, लेकिन अवकलनीयता के लिए फलन में समतलता (sharpness) का होना भी आवश्यक होता है। अतः अवकलनीयता में निरंतरता व समतलता दोनों होने पर ही फलन पर सर्वत्र अवकलन करना सम्भव हो पाता है।

अब हम सीमांत की धारणा का ग्राफ की सहायता से उपयोग करके यह स्पष्ट करते हैं कि $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ होती है।



चित्र 3.8 सीमान्त के विचार का अवकलन में प्रयोग

स्पष्टीकरण—चित्र 3.8 में ox-अक्ष पर उत्पत्ति की मात्रा व oy-अक्ष पर कुल लागत मापी गयी है और TC एक कुल लागत वक्र है जो $y = f(x)$ का सूचक है। यहां y लागत को x उत्पत्ति की मात्रा को सूचित करते हैं। इसे बहुधा $c = f(Q)$ से भी दर्शाते हैं; जहां C लागत को व Q उत्पत्ति की मात्रा को सूचित किया करते हैं।

वक्र पर D व E के बीच परिवर्तन की औसत दर (Average rate of Change), अर्थात् $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{HE}{DH}$ होती है क्योंकि इनके बीच Y का परिवर्तन HE है और x का परिवर्तन DH है। अब बिन्दु E को D की तरफ लाते हैं। F पर, अर्थात्, D व F के बीच परिवर्तन की औसत दर $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{GF}{DG}$ होती है।

इसी प्रकार पुनः F बिन्दु से D की तरफ चलते जाने पर और अंत में D बिन्दु पर परिवर्तन की दर जानने के लिए इस पर स्पर्श रेखा AB का ढाल मापा जाता है जो यहां $\frac{CB}{AC}$ के बराबर होता है। यह परिवर्तन की शीघ्र दर कहलाती है।

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ से जानी जाती है, लेकिन D बिन्दु पर परिवर्तन की दर तात्कालिक या शीघ्र (instantaneous rate of change) होती है। स्मरण रहे कि D व E के बीच परिवर्तन की औसत दर (average rate of change) होती है; क्योंकि यहां पर $\Delta x \to 0$ की स्थिति है। इसे $\Delta x = 0$ नहीं कहते। केवल x का परिवर्तन बहुत-बहुत थोड़ा माना गया है।

अतः $\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ है, अर्थात् D बिन्दु पर परिवर्तन की दर, $\frac{dy}{dx}, \frac{\Delta y}{\Delta x}$ का वह परिणाम है जो $\Delta x \to o$ पर प्राप्त होता है। अतः यहां पर dy/dx वह सीमा है जो $\Delta y/\Delta x$ उस समय लेता है जब $\Delta x \to o$ होता है।

इस प्रकार सीमा की धारण का प्रयोग फलन का अवकलन निकालने में किया जाता है। सीमा व निरंतरता के अध्ययन का वास्तविक प्रयोजन यही है कि इनकी सहायता से चलन-फलन (**differential calculus**) को समझने में मदद मिले। हम अर्थशास्त्र में प्रायः ऐसे फलन ही लेते हैं जो सारी दूर अवकलनीय होते हैं, अर्थात् जिनमें सारी दूर निरंतरता व समतलता पायी जाती है।

3.6 सारांश (Summary)

सीमा एवं निरंतरता की धारणा का अध्ययन अवकलन की प्रक्रिया को आसानी से समझने में सहायता करता है। x को किसी निर्धारित नियम के अनुसार विभिन्न मूल्य दिये जाते है, और उन पर y के मूल्यों का क्रम देखा जाता है जिनके आधार पर फलन की सीमा ज्ञात की जाती है। बायीं ओर की सीमा में बायें से दायें चलते है और दायीं ओर की सीमा में दायें से बाये आते है। जो फलन निरन्तर होता है वह ग्राफ पर पेन्सिल अथवा पेन को बिना उठाये खींचा जा सकता है। फलनों में अनरिन्तिरता भी आ सकती है। अनिरन्तरताएं चार प्रकार की होती है—अनन्त अनिरन्तरता, परिमित अनिरन्तरता, गायब-बिन्दु अनिरन्तरता, एवं खण्डित फलन में अनिरंतरता।

3.7 शब्दावली

सीमा	Limit
निरन्तरता	Continuity
अनिरन्तरता	Discontinuity
स्पर्श रेखा	Tangent
अवकलनीयता	Differentiation
समतलता	Smoothness
चलन-कलन	Differential Calculus

3.8 विविध प्रश्न

निम्नांकित प्रश्नों को हल करके इकाई के अन्त में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान कीजिए।

प्रश्न 1. बायीं ओर की सीमा व दायीं ओर की सीमा का अंतर बतलाएं।

प्रश्न 2. यदि $x \to a^-$ व $x \to a^+$ के लिए $f(x)$ की सीमाओं में अंतर हो तो क्या $x \to a$ पर $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व माना जायगा ?

प्रश्न 3. हल करिए—

(i) $\lim_{x \to \infty} \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \left\langle a + \frac{b}{x} \right\rangle$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \left\langle \frac{x^2+2x-1}{2x+2} \right\rangle$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \left\langle \frac{x-y}{x+y} \right\rangle$

प्रश्न 4. फलन कब निरंतर कब निरंतर (Continuous) माना जाता है ?

प्रश्न 5. पता करिए कि निम्न फलन X के किस मूल्य पर अनिरंतर (Discontinuous) हैं ?

(i) $f(x) = \frac{1}{2^x - 1}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$

(iii) यदि $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x-3}$ हो तो ज्ञात कीजिए कि x के किस मूल्य पर फलन अनिरंतर है और f(3) भी ज्ञात कीजिए।

(iv) चित्र देकर स्पष्ट करें

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3.9 प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

(1) $x \to \infty$ or $\to \infty$ पर $y \to \infty$

(2) $x \to \infty,\ y \to \infty$ (x के बढ़ने पर y बढ़ता है)

$x \to -\infty,\ y \to -\infty$ (x के घटने पर y घटता जाता है)

(3) (i) जब $x \to 0$ (धनात्मक मूल्यों के माध्यम से) तो $y \to \infty$

जब $x \to 0$, (ऋणात्मक मूल्यों के माध्यम से) तो $y \to -\infty$

(ii) $x \to \infty$ पर, $y \to 0$

बोध प्रश्न 2

(1) बायीं ओर की सीमा = दायीं ओर की सीमा = 15; अतः सीमा = 15 है।

(2) (i) 5 (ii) 5

(3) $x \to 1^+$ पर $y \to \infty$

$x \to 1^-$ पर $y \to -\infty$ [$(y-2)(x-1) = 3$ के आयताकार हाइपरबोला बनाकर दिखायें

(4) $x = a$ पर फलन का मूल्य $= \frac{0}{0}$ जो अर्थहीन (meaningless) है। $x \to a$ पर फलन की सीमा

$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a)$ अतः फलन के मूल्य व फलन की सीमा में अंतर है।

बोध प्रश्न 3

(1) यह फलन पैराबोला बनाता है और $x = 4$ पर $y = -15$ आता है। यह फलन $x = 4$ पर निरंतर है।

(2) चूंकि वह फलन x के सभी परिमित वास्तविक मूल्यों (finite real numbers) पर परिभाषित है इसलिए इसका डोमेन $(-\infty, \infty)$ की दूरी तक है।

यह फलन अपने डोमेन में निरंतर (Continuous) होता है।

(3) यह फलन x के सभी परिमित वास्तविक मूल्यों पर परिभाषित है और इसका डोमेन $(-\infty, \infty)$ तक है। अतः यह अपने डोमेन में निरंतर होता है।

बोध प्रश्न 4

(1) (i) $x = -1$ पर अनिरंतर

(ii) $x = 0$ पर अनिरंतर

(iii) $x = \pm 2$ पर अनिरंतर

(iv) $x = 4$ पर अनिरंतर

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$ की जगह $f(x) = x-1$ प्रतिस्थापित नहीं किया जा सकता,

क्योंकि $x = 4$ पर फलन परिभाषित नहीं है (function is not defined), अर्थात् वह अनिरंतर है, लेकिन x के अन्य मूल्यां पर, $x \neq 4$, फलन निरंतर है, तथा $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x+1)$ है, और यह रैखिक फलन है। अतः $x \neq 4$ के मूल्यों पर फलन निरंतर है। $x \to 4$ पर सीमा निकालने में $f(x) = (x-1)$ का उपयोग किया जा सकता है।

(3) खण्डित फलन में x के दो लगातार मूल्यों के बीच $f(x)$ के मूल्य परिभाषित न होने से "अनिरंतरता" पायी जाती है। कार, रेफ्रिजरेटर, टी वी सेट, बिजली के पंखे, रेडियो आदि के उदाहरण दिये जा सकते हैं।

विविध प्रश्नों के उत्तर

(1) बायीं ओर की सीमा में वक्र पर बायें से दायें चलकर देखा जाता है; जैसे $x \to a^-$ में a से नीचे के मूल्यों से ऊंचे के मूल्यों पर चला जाता है।

दायीं ओर की सीमा में वक्र पर दायें से बायें आते है और इसे $x \to a^+$ से सूचित करते है।

(2) नहीं क्योंकि $x \to a^-$ व $x \to a^+$ पर $f(x)$ की सीमाओं के समान होने पर ही $x \to a$ पर $f(x)$

की सीमा का अस्तित्व माना जाता है।

(3) (i) o

(ii) a

(iii) $\frac{1}{2}$

(iv) -1

(4) तीन शर्तें लिखिए।

(5) (i) हर को शून्य के बराबर करके x का मूल्य ज्ञात करें।

$2^x - 1 = 0 \therefore 2^x = 1 = 2^0$

$\therefore x = 0$ पर फलन अनिरंतर।

(ii) $x = 0$ व 2 पर

(iii) $x = 3$ पर फलन अनिरंतर होगा।

$$f X = \frac{X^2 - 7X + 12}{X - 3} = \frac{(X-3)(X-4)}{X-3} = X - 4$$

$f(3) = -1$ है (रैखिक फलन पर)

3.10 कुछ उपयोगी पुस्तकें

(1) R.G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists, Reprinted, 1967, Chapter, IV.

(2) Draper & Klingman, Mathematical Analysis–Business and Economic application, Second edition, 1972, Chapter 2.

(3) Alpha C. Chiang, Fundamental Method, of Mathematical Economics Third Edition, 1984, pp. 132-154.

(4) Gorakh Prasad, Text Book on Differential Calculus, Chapter I "on limits."

इकाई 4

अवकलन एवं इसका निर्वचन

(Derivative and its Interpretation)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 प्रस्तावना

4.2 अवकलन का अर्थ

4.3 अवकलन के प्रमुख सूत्र

4.3.1 धातांक फलन का अवकलन

4.3.2 स्थिरांक का अवकलन

4.3.3 गुणन क्रिया में अवकलन

4.3.4 भागफल का अवकलन

4.3.5 फलन का फलन - श्रृंखला नियम

4.3.6 विलोम फलन

4.3.7 अस्पष्ट (अनिश्चित) फलन का अवकलन

4.3.8 उच्चतर अवकलन

4.4 सारांश

4.5 शब्दावली

4.6 अभ्यासों के उत्तर

4.7 कुछ उपयोगी पुस्तकें

4.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप

- अवकलन का अर्थ समझ सकेंगे।
- अवकलन की गणितीय क्रियाओं यथा सामान्य फलन स्थिरांक, गुणन क्रिया, भाग, विपरीत फलन, (Inverse function) स्थिरांक, गुणन क्रिया, भाग, विपरीत फलन, अन्तर्निहित फलन (Implicit Function) व फलन का फलन नियमों का प्रयोग कर सकेंगे।

4.1 प्रस्तावना

अवकलन (Differentiation) गणित की एक महत्वपूर्ण विधि है जो ज्ञान की उन सभी शाखाओं (जैसे भौतिक शास्त्र, अर्थशास्त्र, इंजिनीयरिंग) में प्रयुक्त होती है, जहां एक चर के परिवर्त्तन का सम्बन्ध दूसरे चर से हो। उदाहरण के लिये किसी वस्तु के उत्पादन (y) का सम्बन्ध उसके लिये प्रयुक्त श्रम (x) पर निर्भर करता है। अवकलन के द्वारा हम y व x के परिवर्त्तन के मध्य सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं। यदि दो मूल्य निरंतर बदलते है तो इस तरह के परिवर्त्तन से संबंधित प्रश्नों का हल कलन (Calculus) द्वारा खोजा जाता है।

दूसरे शब्दों में इस विधि के द्वारा हम $y = A(x)$ से संबधित प्रश्नों का उत्तर दे सकेंगे। दो चरों के मध्य आपसी संबंध को हम एक रेखा (सरल या वक्र रेखा) के द्वारा भी बता सकते हैं। इस स्थिति में कई महत्वपूर्ण प्रश्न उपस्थित होंगे। जैसे x में परिवर्त्तन होने पर y में परिवर्तन की दर क्या होगी ? y तथा x के संबंध को दर्शाने वाले रेखा में उच्चतम व निम्नतम बिन्दु कौन से होंगे।

4.2 अवकलन का अर्थ (Meaning of Differentiation)

माना कि Y (वस्तु का उपादन x (श्रम) के द्वारा किया जाता है। जैसे 2 हम X की मात्रा में वृद्धि करेंगे, Y वस्तु के उत्पादन में भी वृद्धि होगी। यहां Y आश्रित चर व X स्वतंत्र चर है। माना कि उत्पादन व श्रम में निम्न प्रकार का प्राविधिक संबंध है।

$$y = 3x$$

जब x में अत्यन्त वृद्धि हो, $(\Delta x \to 0)$ तक y की मात्रा में कितना परिवर्त्तन (ΔY) होगा यह अवकलन द्वारा ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण : $y = 3x$ फलन में परिवर्तन की दर का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल : यदि x की मात्रा में सूक्ष्म तर परिवर्त्तन किया जाय $(\Delta x \to 0)$

$$\begin{aligned} Y &= 3X \\ Y + \Delta Y &= 3(X + \Delta X) \\ Y + \Delta Y &= 3X + 3\Delta X) \\ \Delta Y &= 30X \text{ (क्योंकि } 4 = 3x \text{ है)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 3$$

अतः श्रम की एक अल्प इकाई में परिवर्तन के परिणामस्वरूप उत्पादन Y इकाईयों में परिवर्त्तन की दर का अनुपात 3 होगा।

4.3 अवकलन के प्रमुख सूत्र (Characteristics of Differentiation)

अवकलन की क्रिया में हमें कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों की सहायता लेनी होती है। इसमें घातांकों का अवकलन, गुणन क्रिया, भाग फलन, फलन का फलन, अनिश्चित है कि सर्वथमम घातांक फलन के अवकलन को अच्छी तरह हल करें। इससे आगे के प्रश्न हल करना अधिक सुविधा युक्त रहेगा।

इस इकाई में प्रयुक्त होने वाले अवकलन के प्रमुख सूत्रों की सूचि निम्नलिखित है।

(a) $Y = f(x) = X^n$ तो $f, (x) = n \times^{n-1}$ (घातांक)

---

* वर्तमान संदर्भ में Differentiate क्रिया है तथा Derivative (अवकलन) तथा Differentiation (अवकलन) समान अर्थ में प्रयुक्त होते है।

(b) $Y = f(x) = C$ (रथिराक) तो $fv(x) = 0$

(c) $Y = uv\ f''(x) = U\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{ax}$ (गुणा)

(d) $Y = \dfrac{U}{V} \quad f'(x) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ (भागफल)

(e) $Y = f(x), Z = f(y)$

$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{dy}.\dfrac{dy}{dx}$ (फलन का फलन)

(f) $\dfrac{dy}{dx}.\dfrac{dx}{dy} = 1$ (विलोम फलन)

4.3.1 घातांक फलन का अवकलन (Differentation of a Power Function)

यदि $y = a \times^{\eta}$ है जहां व कोई स्थिरांक तथा η घातांक है इसका फलन $\lim \Delta x \to 0 \dfrac{dy}{dx} = (\eta)$ (a) $\times^{\eta-1}$ होगा।

उदाहरण : $y = 4x^3$

$$\lim \Delta x \to 0 \frac{dy}{dx} = (3)(4) \times x^{3-1} = 12x^2$$

उदाहरण : $y = -7x^2$

$$\frac{dy}{dx} = (2)(-7) \times^{2-1} = -14x$$

उदाहरण : $y = \dfrac{3}{2} \times^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = (-2)(\frac{3}{2}) \times^{-2-1} = -3^{-3}$$

x^{-3} को $\dfrac{1}{x^3}$ भी लिखा जा सकता है।

(Exercise 1. निम्नलिखित मूल्यों का $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये। Differentiate the following function.

(i) $y = 2 \times^3$

(ii) $y = -2x^4$

(iii) $y = 2 \times \dfrac{3}{2}$

(iv) $4 = -5\sqrt{x}$

(v) $y = 6x^2 + 10x$

4.3.2 स्थिरांक का अवकलन (Differentiation of a constant)

सूत्र रूप में x का कोई पद नहीं तथा केवल स्थिरांक हो तो अवकलन शून्य होता है।

$$y = a$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = 0$$

उदाहरण : $y = 6$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

उदाहरण : $4 = 3x^2 + 5x + 8$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 5$$

Exercise 2

E. 2. निम्नलिखित पदों का अवकलन कीजिये।

(Differentiate the following function.)

(i) $y = 3x^2 - 6x + 7$

(ii) $y = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{7}x^3 + \frac{7}{12}x^2 - \frac{6x}{15} + \frac{7}{3}$

(iii) $y = \frac{2x^2}{7} + \frac{3x}{11} - \frac{6}{13}$

(iv) $y = 2\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x^2} + 6\sqrt{x} + 7$

(v) $y = 3x^m + 6x^{m-2}$

4.3.3 गुणन क्रिया में अवलकलन

यदि y चर दो या दो से अधिक गुणनखंड़ों का गुणा है तो हम प्रत्येक गुणनखंड को u, v, w इस तरह का संक्षिप्त नाम देते हैं। इसके पश्चात् निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$y = uv$$

$$\frac{dy}{dx} = U.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

अर्थात् प्रथम गुणनखंड को स्थिर रखकर दूसरे गुणनखंड के अवकलन से गुणा करेंगे। तथा दूसरे गुणनखंड हो स्थिर रखकर प्रथम गुणनखंड के अवकलन से गुणा करेंगे। फिर दोनों पदोंका योग करेंगे।

उदाहरण : $y = (3x^2 + 5x)(2x^2 + 3x)$

माना कि $3x^2 + 5x = U, \quad 2x^2 + 3x = v$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3, \; \frac{du}{dx} = 6x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 5x)(4x + 3) + (2x^2 + 3x)(6x + 5)$$
$$= (12x^3 + 20x^2 + 9x^2 + 15x) + (12x^3 + 18x^2 + 10x^2 + 15x)$$
$$= 24x^3 + 57x^2 + 30x$$

यदि आप उपरोक्त उदाहरण में पहले गुणनखंडों को आपस में गुणा करें तथा फिर अवकलन करें तब भी यही परिणाम प्राप्त होंगे।

$y = 6x^4 + 19x^3 + 5x^2$ (गुणा करने पर on multiplication)

$$\frac{dy}{dx} = 24x^3 + 57x^2 + 30x$$

उदाहरण : $y = (3 + \sqrt{x})\ (2x^2 = -9x + 5)$

माना कि $(3 + \sqrt{x})$ एवं $(2x^2 - 9x + 5) = V$

$$\frac{dy}{dx} = (3 + x^{1/2})\ (4 \times -9) + (2x^2 - 9x + 5)\ (\frac{1}{2} x^{1/2})$$

$$\text{or} = (12x + 4x^{3/2} - 9x^{1/2} - 27) + (\frac{1}{2}.2x^{3/2} - \frac{9}{2}x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2})$$

$$\text{or} = (12x + 4x^{3/2} - 9x^{1/2} - \frac{9}{2}x^{1/2} + x^{3/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2} - 27)$$

$$\text{or} = (12x + 5x^{3/2} - \frac{27}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}} - 27)$$

$$\text{or} = 12x + 5x^{3/2} - \frac{27}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}} - 27)$$

निम्नलिखित का अवकलन कीजिये।

(i) $y = (3x + 4)(2x - 5)$

(ii) $y = (x^5 + x^2)(x^3 + x)$

(iii) $y = (3x5 + 6x^2)(4x^2 - 6x)$

(iv) $y = (4x^{3/2} + 3x^{1/2})\ (2x^3 - 5x^{3/4})$

(v) $y = (6\sqrt{x} + 7)\ (3x^3 + 2\sqrt[3]{x^5} - 7x^2 + 6x + 4$

(vi) $y = (2x + 5)(-3x^2 + 6)$

(vii) $y = (4\sqrt{x} \times +3)\ (3 - \sqrt{x})$

(viii) $y = (6\sqrt{x^2} + 10x - 3)\ (10x^2 - 6x)$

यदि दो गुणनखंडों के स्थान पर दो से अधिक पद हों तो निम्नलिखित क्रिया दोहराई जायेगी

$y = f(u, v, w)$

$$\frac{dy}{dx} = Uv\frac{dw}{dx} + UW\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$y = (2x + 5)\ (3x^2 - 6)(x + 2)$

माना कि $2x+5 = u, 3x^2-6=v, x + 2 = w$

$$\frac{dy}{dx} = (2x+5)(3x^2-6)\frac{d}{dx}(x+2) + (2x+5)$$

$$(x+2)\frac{d}{dx}(3x^2-6) + (3x^2-6)(x+2)$$

$$\frac{d}{dx}(2x+5)$$

$$\frac{d}{dx}(2x+5)(3x^2-6)(1) + (2x+5)(x+2)(6x) +$$

$$(3x^2-6)(x+2)(2)$$

$$= (6x^3+15x^2-30-12x) + (12x^2+30x^2+24x^2+60x) + (6x^3+12x^2-12x-24)$$

$$= 6x^3 + 15x^2 - 12x - 30 + 12x^3 + 54x^2 + 60x + 6x^3 + 12x^2 - 12x - 24$$

$$= 24x^3 + 81x^2 + 36x - 54$$

Exercise No. 4

निम्नलिखित का अवकलन कीजिये (Differentiate the following)

(i) $Y = (2X-3)(5X+2)(3X-4)$

(ii) $Y = (2X^2-6x)(2X+1)(X-7)$

4.3.4. भागफल का अवकलन (Differentiation of Division)

यदि Y फलन किसी भाग के रूप में हो तब भी उसका अवकलन किया जा सकता है। इसमें अंश. को U तथा हर को V के रूप में प्रकट किया जाता है। सूत्र रूप में

$$Y = \frac{U}{V}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

अर्थात हर (v) को अंश के अवकलन से गुणा किया जाता है अंश को हर के अवकलन से गुणा किया जाता है तथा प्रथम में से द्वितीय को घटाया जाता है। फिर v^2 का भाग दिया जाता है।

उदाहरण :

$$y = \frac{3x^2 - 5x}{6x^3 + 7x^2 - 10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6x^3+7x^2-10)\frac{d}{dx}(3x^2-5x) - (3x^2-5x)\frac{d}{dx}(6x^3+7x^2-10)}{(6x^3+7x^2-10)^2}$$

$$= \frac{(6x^3+7x^2-10)(6x-5)-(3x^2-5x)(18x^2+14x)}{(6x^3+7x^2-10)^2}$$

$$= \frac{(36x^4+12x^3-35x^2-60x+50)-(54x^4-48x^3-70x^2)}{(6x^3+7x^2-10)^2}$$

$$= \frac{18x^4+60x^3+35x^2-60x+50}{(6x^3+7x^2-10)^2}$$

उदाहरण :

$$y = \frac{t^2-5\sqrt{t}}{2t-5} \qquad y = t(f)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2t-5)\frac{d}{dt}(t^2-5\sqrt{t})-(t^2-5\sqrt{t})\frac{d}{dt}(2t-5)}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(2t-5)(2t-\frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}})-(t^2-5\sqrt{t})(2)}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(4t^2-10t-5\sqrt{t}+\frac{25}{2\sqrt{t}})-(2t^2-10\sqrt{t})}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(2t^2-10t+5\sqrt{t}+\frac{25}{2\sqrt{t}})}{(2t-5)^2}$$

Exercise No. 5

अवकलन ज्ञात कीजिये। (Differentiate the following)

(i) $Y = \frac{3x^3+5x}{4x^2-6x}$

(ii) $Y = \frac{12x^2+6x-7}{3x+5}$

(iii) $Y = \frac{-3x^3-6x}{2x^2+16x-4}$

(iv) $P = \frac{-2x^2+6x}{4x-7}$

(v) $Z = \frac{3y^2-6y}{2y^2-7y}$

4.3.5. फलन का फलन—श्रृंखला नियम (Function of a Function - Chain Rule)

अब तक की अवकलन क्रियाओं में दो चरों के मध्य सम्बन्ध का ही निर्धारण हुआ है पर व्यवहारिक जीवन में तीन चरों के मध्य आपसी सम्बंध भी हो सकता है। जिसमें प्रथम चर दूसरे से व दूसरा चर तीसरे से सम्बन्धित हो। उदाहरण के लिये सीमेंट का उत्पादन पत्थर पर निर्भर है तथा पत्थर का उत्पादन श्रम पर निर्भर है। हम यदि सीमेंट को Z, पत्थर को Y व श्रम को X मानें तो यह कहा जा सकता है कि

$$Y = f(x)$$

$$Z = f(y)$$

हमारा उद्देश्य Z व X के मध्य सम्बंध स्थापित करना है जिसके लिये सूत्र है।

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

उदाहरण :

$$y = 3x^2, z = -2y^3$$

$$\frac{dz}{dy} = -6y^2 \frac{dy}{dx} = 6x$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= -6(y)^2 . 6x$$

as $4 = 3x^2$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -6(3x^2)^2 . 6x$$

$$= -6(9x^4) . 6x$$

$$\frac{dz}{dx} = -324x^5.$$

इसकी सत्यता प्रमाणित करने के लिये हम मूल प्रश्न में y के मान में x का मान प्रतिस्थापित करें व फिर अवकलन करें तो भी यही उत्तर प्राप्त होगा।

$$z = -2y^3 = -2(3x^2)^3$$

$$= -2(27x^6) = -54x^6$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 324x^5.$$

उदाहरण :

$$U = (3x^2 - 6x + 9)^4$$

इस उदाहरण में यद्यपि U को X के रूप में प्रत्यक्षत : प्रकट किया गया है पर हल को अधिक सुविधाजनक करने के लिये हम $3x^2 - 6x + 9 = 4$ मानते हैं।

$$U = (y)^4$$

$$\frac{du}{dy} = uy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 6$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 4(Y)^3 \cdot (6x - 6)$$

$$= 4(3x^2 - 6x + 9)(6x - 6)$$

व्यवहार में इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये

$\frac{du}{dx} =$ (कोष्ठक की संख्या को स्थिर मानकर अवकलन)

(कोष्ठक का अवकलन)

उदाहरण :

$$z = (2x + 5)^3$$

$$\frac{dx}{dx} = 3(2x + 5)^2\ (2)$$

$$= 6(4x^2 + 20x + 25)$$

$$= 24\ x^2 + 120\ x + 150$$

Exercise No. 6

अवकलन कीजिये : (Differentiate the Following)

(i) $Z = 3Y^2;\ Y = (2x - 5)$

(ii) $Z = -7Y^3;\ Y = (3x - 2)$

(iii) $Y = (2X^2 - 5x + 7)$

(iv) $Y = (-3x^3 + 6x^2 - 8x + 3)^3$

(v) $Y = (2x^2 - 9x + 5)\ \frac{4}{3}$

(vi) $Y = (-5x^3 + 6x^2 - 3x + 8)^2$

(vii) $P = (3x^2 + 7x - 3)^4$

(viii) $P = (15x^3 + 6x^2 - 10x + 8)^2$

(ix) $T = (\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x5} - x^3 + 2x^2)^3$

(x) $Z = 3y^3 + 5;\ Y = -3x^2 + 6x + 3$

(xi) $Z = -2Y^2 + 3Y;\ Y = 6x^3 + 7x^2 - 5$

(xii) $Z = Y^3 + 3Y^2 - 6y + 3;\ \ Y = 2x + 5$

(xiii) $Y = (3x^2 - 6x + 2)\frac{-2}{3}$

(xiv) $Y = (2x + 5)^3$

(xv) $Y = (4x - 4)^2$

4.3.6 विलोम फलन (Inverse Function)

दो चर राशियों X व Y में यदि $Y = f(X)$ है तथा जिसे X के लिये हल किया जा सकता है तथा $x = g(y)$ है तथा जिसे y के लिये हल किया जा सकता है तो $\frac{dx}{dy}$ व $\frac{dy}{dx}$ में विलोम सम्बन्ध होगा।विलोम फलन का नियम तभी लागू होता जब दोनों फलन एक मूल्य वाले हों। उपरोक्त तथ्यों को निम्न उदाहरण में समझा जा सकता है।

उदाहरण :

$$X = Y - 3$$

इस फलन की विशेषता यह है कि x के प्रत्येक मूल्य के साथ y का कोई मूल्य होगा।

उदाहरण :

$$y = x^2$$

इसमें $X = \sqrt{Y}$ है पर Y का मूल्य धनात्मक भी हो सकता है तथा ऋणात्मक भी अतः X व Y के आपसी सन्दर्भ मूल्य समान नहीं होगा। विलोम फलन तभी ज्ञात किया जा सकता है जब एकीय रेखांकन (one to one Mapping) हो। इस उदाहरण में

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(Y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dy} = (2x)\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (X)(X^{-1}) = X^0 = 1$$

अतः दो विलोम अवकलनों का गुणा ! होता है।

या $= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$= \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

इस विधि से हम कठिन अवकलनों को भी ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण :

$$X = Y^3 + 8 - Y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = 3Y^2 - 2Y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3Y^2 - 2y}$$

उदाहरण :

$$X = \sqrt{Y^2 - 7Y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(Y^2 - 7Y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(Y^2 - 7Y)^{\frac{1}{2}}(2Y - 7)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(2Y - 7)}{\sqrt[2]{(Y^2 - 7Y)}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{(2Y - 7)}{\sqrt[2]{Y^2 - 7Y}}} = \frac{\sqrt[2]{Y^2 - 7Y}}{2Y - 7}$$

Exercise No. 7

विलोम फलन विधि से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये–

(i) $X = Y^2 + 3Y$

(ii) $X = Y^3 + 2Y$

(iii) $X = Y^{\frac{3}{2}} + 2Y$

4.3.7 अस्पष्ट (अनिश्चित) फलन का अवकलन (Differentiation of Implicit Function)

कुछ पदमूल्य संयुक्त होते हैं अर्थात् उनमें X व Y दोनों के ही पद होते हैं इन्हें अस्पष्ट या अनिश्चित फलन कहा जाता है। जैसे $X = 3X^2 + 2XY - 6X$

उपरोक्त फलन में X व Y दोनों ही पद एक साथ हैं। इनका अवकलन करते समय हम Y को X का फलन मान कर प्रत्येक पद का अवकलन करते है तथा संयुक्त पदों में जहां X व Y दोनों ही वहां Product Rule का प्रयोग करते हैं। जहां केवल Y के पद है उनका Y के संदर्भ में अवकलन कर आगे $\frac{dy}{dx}$ लिखते हैं।

उदाहरण :

$$x^3 + y^3 + 3axy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} + 3a\,(x\frac{dy}{ax} + Y) = 0$$

(अर्थात् Y के पदों का अवकलन y के संदर्भ में कर उनके आगे $\frac{dy}{dx}$ लिखा है। अन्तिम पद में हमने 3a को ax समान मूल्य (common) मानकर बाहर लिखा है, तथा शेष xy का गुणनफलन में अवकलन किया है।)

$$3(y^2 = ax)\frac{dy}{dx} = -3(x^2 + ay)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2 + ay)}{3(y^2 + ax)} = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2 + ay)}{y^2 + ax)}$$

उदाहरण:

$$x^2 + 2xy + y^3 - xy^2 = 0$$

x का सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2(x\frac{dy}{ax} + y) + 3y^2\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{ax} - y^2 = 0$$

$$= 2x\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} = -2x - 2y + y^2$$

$$= (2x + 3y^2 - 2xy)\frac{dy}{dx} = -2x - 2y + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 2y + y^2}{(2x + 3y^2 - 2xy)}$$

उदाहरण :

$$6x^3 = y^3$$

$$= 6x^3 - y^3 = 0$$

x का सापेक्ष अवकलन करने पर

$$18x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-3y^2 \frac{dy}{dx} = -18 \times 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18 \times 2}{-3y^2} = \frac{6 \times 2}{y^2}$$

उदाहरण :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = 0$$ [a स्थिरांक है]

x सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{-\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Exercise No. 8

निम्नांकित प्रश्नों का x के संदर्भ में अवकलन ज्ञात कीजिये।

(i) $x^2y - xy^2 + x^3 + y^2 = 0$

(ii) $x^2y - x + y = 0$

(iii) $x^3 + xy + y - 1 = 0$

(iv) $x^2 - y^2 + 3x = 5y$

(v) $2x^2 - 3xy + y^2 + x - 2y - 8 = 0$

(vi) $2x^2 - y^2 = 1$

4.3.8 उच्चतर अवकलन (Higher Differentiation)

अब तक हमारे अध्ययन का विषय प्रथम अवकलन रहा है। पर कई बार प्रथम अवकलन का पुनः अवकलन करना होता है यह द्वितीय अवकलन कहलाता है। प्रथम अवकलन को हम $\frac{d^2y}{a \times 2}$ या f''(x) कहलायेगा। इसी प्रकार तीसरा अवकलन $\frac{d^3y}{d \times 3}$ या A''' कहलायेगा।

इस प्रकार के अवकलन उच्चतर अवकलन Higher or Successive) कहलाते हैं।

उदाहरण :

$$y = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 6x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 12x^3 + 18x^2 - 4x + 6$$

$$f''(x) = 72x + 36$$

$$f'''(x) = 72$$

$$f''''(x) = 0$$

अर्थशास्त्र की व्यवहारिक समस्याओं में प्रायः द्वितीय अवकलन का ही प्रयोग होता है।

Exercise No. 9

उच्चतर फलन ज्ञात कीजिये।

(i) $3x^3 - 6x^2 + 5x - 8$

(ii) $x^5 - 6x^4 + 4x$

(iii) $\frac{-6x}{2x+5}$

(iv) $(2x + 5)\ (2x - 5)$

4.4. सारांश (Summary)

अवकलन विधि ज्ञान की उन सभी शाखाओं में प्रयुक्त होतीहै जहां एक चर के परिवर्तन का सम्बन्ध अन्य चर से हो। अवकलन का अर्थ स्वतंत्र चर में सूक्ष्मतर परिवर्तन ($\Delta x \to 0$) करने पर निर्भर चर में होने वालों परिवर्तनों का अनुपात है।

$$y = f(x); \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

किन्ही दो चरों के मध्य अवकलन के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

(a) $y = x^n$ $\quad f'(x) = nx^{n-1}$

(b) $y = C$ $\quad f'(x) = 0$

(c) $y = Uv$ $\quad f'(x) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

(d) $y = \frac{u}{v}$ $\quad f'(x) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2}$

(e) $y = f(x),$ $\quad z = f(y)$ (श्रृंखला नियम)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

(f) $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ (विलोम फलन)

यदि दो चर x व y एक ही फलन में युक्त है तो गुणा का नियम प्रयोग कर दोनों चरों का अलग-अलग फलन करेंगे।

4.5 शब्दावली

अवकलन	Differentiation
अवकलज	Derivative
अनिश्चित या अर्न्तनिर्हित फलन	Implicit function
आश्रित चर	Dependent Variable
उच्चतर अवकलन	Successive differentiation
गुणनखंड	Factors
घातांक	Power
चर	Variable
फलन का फलन	Function of a function
वक्र रेखा	Curve
विलोम या विपरीत फलन	Inverse function
श्रृंखला नियम	Chain rule
सरल रेखा	Straight line
स्थिरांक/अचर	Constant
स्वतंत्र चर	Indpendent Variable
कलन	Calculus
संयुक्त फलन	Composite function
सीमांत	Marginal
के सापेक्ष	With respect to
प्रवणता/ढलान	Slope

4.6 अभ्यासों के उत्तर (Answers to Problems)

Exercise No. 1

(i) $6x^2$

(ii) $-8x^3$

(iii) $3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$

(iv) $\frac{-5}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{-5}{2\sqrt{x}}$

(v) $12x + 10$

Exercise No. 2

(i) $6x-6$

(ii) $\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{7}x^2+\frac{7x}{6}-\frac{6}{15}$

(iii) $\frac{4}{7}x+\frac{3}{11}$

(iv) $\sqrt[3]{x}-6+\frac{3}{\sqrt{x}}$

(v) $3mx^{m-1}+6(m-2)x^{m-3}$

Exercise No. 3

(i) $12x-7$

(ii) $8x^7+6x^5+5x^4+3x^2$

(iii) $84x^6-108x^5+96x^3-108x^2$

(iv) $36x^{\frac{7}{2}}+21x^{\frac{5}{2}}-45x^{\frac{5}{4}}-\frac{75}{4}x^{\frac{1}{4}}$

(v) $63x^2+\frac{70}{3}x^{\frac{2}{3}}-98x+42$

(vi) $-18x^2+30x+12$

(vii) $-4+\frac{4.5}{\sqrt{x}}$

(viii) $480x^2+132x-18$

Exercise No. 4

(i) $90x^2-146x+26$

(ii) $16x^3-114x^2+128x+42$

Exercise No. 5

(i) $\frac{(4x^2-6x)(9x^2+5)-(3x^3+5x)(8x-6)}{(4x^2-6x)^2}$

(ii) $\frac{(3x+5)(24x+6)-(12x^2+6x-7)(3)}{(3x+5)^2}$

(iii) $\frac{(2x^2+16x-4)(-9x^2-6)-(3x^3-6x)(2x^2+16x-4)}{(2x^2-16x-4)}$

(iv) $\frac{(4x+7)(-4x+6)-(-2x^2+6x)(4)}{(4x-7)^2}$

(v) $\frac{(2y^2+7y)(6x-6)-(3x^2-6y)}{(2y^2-7y)^2}$

Exercise No. 6

(i) $24x - 60$

(ii) $-567x^2 + 756x - 252$

(iii) $16x^3 - 60x^2 + 106x - 70$

(iv) $3(-3x^2 + 6x^2 - 8x + 3)^2(-9x^2 + 12x - 8)$

(v) $(\frac{16}{3}x - 12)(2x^2 - 9x + 5)$

(vi) $(-30x^2 + 24x - 6)(-5x^3 + 6x^2 - 3x + 8)$

(vii) $4(3x^2 + 7x - 3)^3(6x + 7)$

(viii) $2(15x^3 + 6x^2 - 10x + 8)(45x^2 + 12x - 10)$

(ix) $3(\sqrt{3x} + 3\sqrt{x^5} - x^3 + 2x^2)^2(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} - 3x^2 + 4x)$

(x) $108x^3 - 324x^2 + 108x + 108$

(xi) $-432x^5 - 840x^4 - 392x3 + 414x^2 + 322x$

(xii) $24x^2 + 174x + 84$

(xiii) $\dfrac{-2(6x-6)}{3(3x^2 - 6x + 2)^{\frac{5}{3}}}$

(xiv) $6(2x + 5)^2$

(xv) $8(4x - 4) = 32x - 32$

Exercise No. 7

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y+3}$

(ii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3y+2}$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}y+2}$

Exercise No. 8

(i) $\dfrac{y^2 - 3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$

(ii) $\dfrac{1-2xy}{x^2+1}$

(iii) $3\dfrac{x^2+y}{x+1}$

(iv) $\frac{2y+3}{2y+5}$

(v) $\frac{-4x+3y-1}{-3x+y-2}$

(vi) $\frac{2x}{y}$

Exercise No. 9

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}=18$

(ii) $\frac{d^5y}{dx^5}=120$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{12x+98}{(2x+5)^3}$

(iv) $\frac{d^2y}{dx^2}=8$

4.7 कुछ उपयोगी पुस्तकें (References)

1. L.W.T. Stafford, **Mathematics for Economists,** ELBS Edition 1974
2. J. Parry Lewis, **An Introduction to Mathematics for Students of Economics,** 3rd Edition, 1969
3. Taro Yamane, **Mathematics for Economists.** Prentice Hall of India
4. Mehta & Madhanani, **Mathematics for Economists.** Sultan Chand & Sons, 1988
5. Granville, Smith, Longley, **Elements of the Differential and Integral Calculus,** Oxford & IBH. Publishing Co.
6. लक्ष्मीनारायण नाथूरामका, **अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग,** कालेज बुक हाउस जयपुर

इकाई 5

लघुगुणकीय अवकलन व लोच की माप

(Logarithmic Derivation and Evaluation of Elasticities)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप

- सामान्य व प्राकृतिक लघुगुणक का अर्थ समझ सकेंगे।
- सामान्य व प्राकृतिक लघुगुणक का अवकलन करना सीखेंगे।
- लघुगुणक अवकलन का आर्थिक विश्लेषण यथा मांग की लोच, उत्पादन फलन आदि में प्रयोग कर सकेंगे।

5.1 प्रस्तावना

अवकलन क्रिया में लघुगुणक का महत्वपूर्ण स्थान हैं। अर्थशास्त्र में कई चर इस प्रकार के हैं जिनकी वृद्धि दर लघुगुणकों द्वारा अधिक अच्छी तरह प्रकट की जा सकती है। लघुगुणक दो प्रकार के होते है।

(i) सामान्य लघुगुणक–जिनका आधार प्राय 10 होता है। जैसे $10^3 = 1000$ अर्थात् 1000 का लघुगुणक 3 है जिसका आधार 10 होता है उन्हें $\log_{10}$ या log लिखा जाता है।

(ii) प्राकृतिक लघुगुणक– जिनका आधार e होता है e का मान 2.71828.... होता है। इसे समझने के लिये हम एक सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

अर्थात् हम $\times$ की मात्रा सूक्ष्मतर करते जायेंगे तो e का क्या मूल्य होगा ?

यदि $x = 0.5$, तो $e = (1+.5)^{\frac{1}{.5}} = (1.5)^2 = 2.25$

यादि $x = 0.1$ तो $e = (1+.1)^{\frac{1}{.1}} = (1.1)^{10} = 2.59$

यदि $x = 0.0001$ तो $\begin{aligned} e &= (1+0.0001)^{\frac{1}{0.001}} \\ &= (1.0001) = 2.7181 \end{aligned}$

इस प्रकार हम e के मान के निकट पहुंच जाते हैं। अब को कितना भी सूक्ष्म किया जाय जो सैद्धान्तिक दृष्टिकोण से शून्य के निकट हो पर e का मान $e = 2.71828$ से आगे नहीं बढ़ेगा।

प्राकृतिक लघुगुणक को $\log^e$ या ln लिखा जाता है। •

लघुगुणक अवकलन के सूत्र (logarithmic Differentiation)

लघुगुणक अवकलन के महत्वपूर्ण सूत्र निम्नलिखित हैं।

5.2.1 log y का अवकलन

यदि फलन log y है तो $\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{\log e}{y}.\frac{dy}{dx}$ होगा

उदाहरण :

$$y = \log\frac{2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{\frac{2}{x}}.\frac{d}{dx}(\frac{2}{x})$$

$$= \frac{x.\log e}{2}.(-2)(x^{-2})$$

$$= \frac{-x.\log e}{\times 2} = \frac{-\log e}{x}$$

Case I

$y = \log_a^x$

using the difference quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ as

$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$

$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - y$

$= \log_a (x + \Delta x) - \log_a^x \qquad [\because\ y = \log_a^x]$

$$= \log_a \left\langle \frac{x + \Delta x}{x} \right\rangle$$

$$= \log_a \frac{(1 + \Delta x)}{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})$$

$$= \frac{1}{x}\left\langle \frac{x}{\Delta x} \right\rangle \log_a [1 + \frac{1}{x / \Delta x}]$$

$$= \frac{1}{x} \log_a [1 + \frac{1}{x / \Delta x} \times] / \Delta x$$

$$= \frac{1}{x} \log_a [1 + \frac{1}{n}]^n \qquad [\because \frac{x}{\Delta d} = n]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to \infty} \log a \left\langle 1 + \frac{1}{n} \right\rangle^n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a^e \qquad \left\langle \because \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \right\rangle$$

using this basic formula, we get the following rules

(a) $y = \text{In}\ x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{In}\ e = \frac{1}{x}$$

(b) $y = \log_a w$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} . \frac{dw}{dx} = (\frac{1}{w} \log_a^e) \frac{dw}{dx}$$

उदाहरण

$y = \log (3x^2 - 5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{y} . \frac{d}{dx}(y)$$

$$=\frac{\log e}{3x^2-5}(6x)=\frac{6x.\log e}{3x^2-5}$$

Exercise 1

अवकलन ज्ञात करिये

(i) $\log(5x^2+6x-10)$

(ii) $\log\frac{3+x}{2x^2}$

5.2.2 $\log_e y$ का अवकलन

यदि हमें $\log_e y$ (जिसका आधार प्राकृतिक लघुगुणक e है) का अवकलन करना है तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\frac{d}{dx}(\log_e y)=\frac{d}{dx}(\ln y)$$

यदि x सम्बन्धित फलन को माना जाय तो

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dx}$$

उदाहरण :

$y=\log_e x^3$

माना कि $x^3=w$ है

$y=\log_e{}^w$

$=\frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dx}$

$=\frac{1}{w}.3x^2$ [क्योंकि $\log w$ का अवकलन $\frac{1}{w}$ है]

$=\frac{1}{x^3}.3x^2$ [w का मूल्य प्रतिस्थापन करने पर]

$=\frac{3}{x}$

उदाहरण :

$y=\ln\frac{x^2}{1+x^2}$

यहां $\frac{x^2}{1+x^2} = w$ है

तो $\frac{dy}{dw} = \frac{1}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2}$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\left\langle \frac{x^2}{1+x^2} \right\rangle = \frac{(1+x^2)(2x)-(x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(x)(1+x^2)}$$

Exercise No. 2

अवकलन ज्ञात कीजिये

(i) $y = \log_e (ax + b)^2$

(ii) $y = \ln \sqrt{9-2x^2}$

(iii) $y = \ln (3x + 5)(2x - 6)$

(iv) $y = \log_e (x + 3)^2$

(v) $y = \frac{\ln(x+2)}{x}$

(vi) $y = \ln \frac{x^4}{(3x-4)^2}$

5.2.3 e^x का अवकलन (Differentiation of e^x)

यदि फलन का रूप $y = e^x$ है तो निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग होगा।

$y = e^w$ where w is a function of x, then

$$\frac{dy}{dx} = y.\frac{dw}{dx}.\ln e = y.\frac{dw}{dx}$$

$3x^2 + 6x - 10$

उदाहरण :

$y = e$

माना कि $3x^2 + 6x - 10 = w$

$$\frac{dy}{dx} = y.\frac{dw}{dx}$$

$$= e^{3x^2+6x-10}\,(6x+6)$$

$$= (6x+6).e^{3x^2+6x-10}$$

उदाहरण :

$$y = \frac{e^{ax}+3x}{5}$$

या $y = \frac{e^{ax}}{5} + \frac{3x}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}e^{ax}.a + \frac{3}{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{5}e^{ax} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(a_e^{ax} + 3)$$

Exercise No. 3

अवकलन कीजिये।

(i) $y = e^{x2}$

(ii) $y = e\frac{2}{x}$

(iii) xe^{-2x}

5.2.4 a^x का अवकलन (Differentiation of a^x)

यदि फलन a^x के रूप में है तो निम्नलिखित विधि के अवकलन होगा

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x.\log e^a.\frac{dw}{dx}$$

[यहां a के घातांक के रूप में सम्पूर्ण फलन को w माना जाता है]

उदाहरण :

$3x^2 + 10x - 7$

[मानाकि $3x^2+10x-7=4$]

$\frac{dy}{dx}=a^{3x2}+10x-7.\ \log e\ a.\ (6x+10)$

उदाहरण :

$y = a\,\frac{3x+5}{6x^2}$ [माना कि $\frac{3x+5}{6x^2} = w$]

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \log_e{}^a . \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{3x+5}{a\, 6x^2} \log e^a . \frac{6x^2\, 3 - (3x+5)\,(12x)}{(6x^2)^2}$$

$$= a\frac{3x+5}{6x^2} \log_e{}^a \frac{-18x^2 - 60x}{36x^4}$$

Let this exponential funtion be

$$y = a^x$$

To find the derivative of y w.r.t x, let us apply the techinique of taking logarithms to the base and then differentiating.

$$\ln y = x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \left(\frac{d}{dx}x\right)(\ln a) + x\left(\frac{d}{dx}\ln a\right)$$

$$\left(\frac{d}{dy}\ln x\right)\frac{dy}{dx} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y.\ln a = a^x \ln a$$

Thus the rule is

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

When $y = a^w$

Where w is a function of x,

$$\ln y = w \ln a$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx}.\ln a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y.\frac{dw}{dx}.\ln a$$

Note : $\log_e = \ln$

Exercise No. 4

निम्नलिखित पदों का अवकलन कीजिये।

(i) $y = a^{3x+5}$

(ii) $y = a^{2x^2+10x-7}$

(iii) $y = a^{x^3}$

(iv) $y = a^{3x^2}$

5.3 लघुगुणक अवकलन के आर्थिक प्रयोग

मांग की लोच अर्थशास्त्र की एक सुपरिचित धारणा है। मांग की लोच का तात्पर्य वस्तु की मांग व मूल्य में आनुपातिक परिवर्तन है।

$$\text{मांग की कीमत लोच (ed)} = \frac{\text{मांग में आनुपातिक परिवर्तन}}{\text{कीमत में आनुपातिक परिवर्तन}}$$

$$= \frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{\Delta x}{x} . \frac{p}{\Delta p} = \frac{p}{x} . \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

यह औसत मांग की लोच ज्ञात करने का सूत्र है। पर यदि हम किसी बिन्दु विशेष की मांग की लोच ज्ञात करना चाहते हैं तो मांग की बिदु लोच के लिये अवकलन की सहायता लेंगे।

सूत्र रूप में

$$ed = \frac{p}{x} . \frac{\Delta x}{\Delta p} \quad [\text{as } \Delta p \to o]$$

अर्थात् p में अत्यंत सूक्ष्म परिवर्तन होने पर

$$ed = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$$

यहां $\frac{dx}{dp}$ मूल्य के संदर्भ में x का अवकलन है।

5.3.1 मांग की लोच का लघुगुणकीय अवकलन

मांग की लोच ज्ञात करने के उपरोक्त सूत्र

$ed = \frac{p}{x} . \frac{dx}{xp}$ को लघुगुणक के रूप में भी प्रकट किया जाता है। उपरोक्त मांग फलन एक समलोचदार मांग का उदाहरण है। यहां सम्पूर्ण मांग फलन के प्रत्येक मूल्य पर मांग की लोच का मान एक है। रेखागणित की दृष्टि से इसका आकार आयताकार हाईपरबोला है।

उदाहरण :

$$\text{मांग फलन} \quad x = \frac{2p-7}{3p^2-6p+8}$$

$$ed = \frac{\partial (\log x)}{\partial (\log p)} = \frac{\frac{1}{x} . \frac{dx}{dp}}{\frac{1}{p} . \frac{dp}{dp}}$$

यहां $\frac{dx}{dp}=\frac{-6p^2+42p-26}{(3p^2-6p+8)^2}$

प्रतिस्थापन करने पर

$$ea=\frac{1}{2p-7}\cdot\frac{-6p^2+42p-26}{(3p^2-6p+8)^2}$$

$$\frac{1}{p}-1$$

$$ed=\frac{p(-6p^2+42p-26)}{(2p-7)(3p^2-6p+8)^2}$$

यह मांग की लोच का सामान्य अवकलन है यदि हम चाहते हैं कि $p=2$ हो तो मांग की लोच क्या होगी इसका उत्तर जानने के लिये हम उपरोक्त सूत्र में $p=2$ का प्रतिस्थापन कर सकते हैं।

5.4 सारांश (Summary)

अर्थशास्त्र में कई चर लघुगुणकों द्वारा अधिक अच्छी तरह प्रकट किये जा सकते हैं।

सामान्य लघुगुणकों का आधार 10 होता है जबकि प्राकृतिक लघुगुणकों का आधार होता है तथा e का मान 2.71828 होता है। लघुगुणक अवकलन के मुख्य सूत्र निम्नलिखित है।

(i) $\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{\log e}{y}\cdot\frac{dv}{dx}$

(ii) $\frac{d}{dx}\log e^{y}=\frac{d}{dx}(\ln y)$

(iii) $\frac{d}{dx}(e^x)=y\frac{dw}{dx}$ $[y=e^x]$

(iv) $\frac{d}{dn}a^x\log e^a\cdot\frac{dw}{dx}$

[e के घातांकों को w मानने पर]

लघुगुणक के अर्थशास्त्र में प्रयोग में मांग की लोच की धारणा सुपरिचित है।

$$ed=\frac{\partial(\log x)}{\partial(\log p)}$$

5.5 शब्दावली

आनुपातिक परिवर्त्तन	Proportionate Change
आयताकार हाईपरबोला	Rectangular Hyperbola
चिन्ह रहित	Modulus
प्राकृतिक लघुगुणक	Natural logarithims
प्रयोग	Applications
बिंदु लोच	Point Elasticity
लघुगुणक	Logarithms

5.6 अभ्यासों के उत्तर (Answers)

Exercise No. 1

(i) $\log_e \dfrac{10x+6}{5x^2+6x-10}$

(ii) $\log_e \dfrac{-2x^2-12x}{(3+x)(2x^2)}$

Exercise No. 2

(i) $\dfrac{2a}{ax+b}$

(ii) $\dfrac{-2x}{9-2x^2}$

(iii) $\dfrac{12x-8}{6x^2-8x+30}$

(iv) $\dfrac{2(x+3)}{(x+3)^2}$

(v) $\dfrac{-2}{x^2+2x}$

(vi) $\dfrac{6x^4-16x^3}{x^4(3x-4)}$

Exercise No. 3

(i) $2x.e^{x^2}$

(ii) $\dfrac{-2}{x^2}.e^{\frac{3}{x}}$

(iii) $e^{-2x}(-2x+1)$

Exercise No. 4

(i) $3a^{3x+5}.\log_e{}^a$

(ii) $a^{2x^2+10x-7}\log_e{}^a.(4x+10)$

(iii) $3x^2.a^{x^3}.\log_e{}^a$

(iv) $6x.a^{3x^2}.\log_e{}^a$

5.7 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Taro Yamane, Mathematics for Economists., Prentice Hall of India.

2. G.S. Monge, Mathematics and Statistics for Economics.

इकाई 6

आंशिक अवकलन एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- दो अथवा अधिक चरों की स्थिति में अवकलन ज्ञात कर सकेंगे; एवं
- द्वितीय व अन्य उच्च क्रम के अवकलन ज्ञात करने की विणि से परिचित हो जाएँगे।
- आंशिक अवकलनों के अर्थशास्त्र के क्षेत्र में विभिन्न उपयोगों से परिचित हो सकेंगे।
- जान सकेंगे कि माँग विश्लेषण, उत्पादन विश्लेषण, आदि में आंशिक अवकलनों का क्या प्रयोग है;
- समरूप फलन के अर्थ से परिचित हो सकेंगे;
- ओयलर प्रमेय के अर्थ से परिचित हो सकेंगे; एवं
- प्रतिबन्ध रहित स्थितियों में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दुओं का पता लगा सकेंगे।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

अब तक आपने एक चर के फलन का अध्ययन किया है। ये फलन दो विभिन्न चरों जैसे x तथा 4 के मध्य समबन्ध को व्यक्त करते हैं एवं यह मान्यता लेते हैं कि इन दो चरों के आधार पर उस सम्बन्ध को हम पर्याप्त रूप से व्यक्त कर सकते हैं। यद्यपि कई मामलों में यह मान्यता पर्याप्त के समीप होते हैं। परन्तु अनेक मामलों में ये फलनात्मक सम्बन्ध अपर्याप्त एवं कभी-कभी तो अर्थहीन सिद्ध होते हैं। इन स्थितियों में सम्बन्ध को एक से अधिक चरों पर निर्भर मानना पड़ता है। उदाहरणार्थ मांग एवं पूर्ति सम्बन्धित वस्तु की कीमत पर ही निर्भर नहीं होती बल्कि कई अन्य वस्तुओं की कीमतों से भी प्रभावित होती है। इसके अतिरिक्त, उपभोक्ताओं की आय; रुचि फैशन, आदि कई घटकों का भी प्रभाव पड़ता है। इस प्रकार सम्बन्ध एवं फलन एक से अधिक चरों के रूप में परिभाषित किए जाने चाहिए। उदाहरणार्थ दो चरों की स्थिति में फलन का रूप $z = (x\ y)$ होगा, इसका अभिप्राय यह है कि z में परिवर्तन x तथा y में परिवर्तनों के फलस्वरूप होगा। x तथा y स्वतंत्र रूप से किसी भी तरह हम ऐसे फलनों का आंशिक अवकलन ज्ञात करते हैं। अवकलन x के संदर्भ में करेंगे तथा बाद में इसी क्रिया को दोहराते हुए x को स्थिर रखकर x का अवकलन y के संदर्भ में ज्ञात करेंगे।

इस इकाई में आपका परिचय आंशिक अवकलन का अर्थ व उनकी संक्रियाओं से कराया जाएगा एवं उदाहरणों के द्वारा कुछ संक्रियाओं को स्पष्ट किया जाएगा।

इस इकाई में आपको अर्थशास्त्र के क्षेत्र में आंशिक अवकलनों के प्रयोग से भी आपको अवगत कराया जायेगा। इसमें मुख्य रूप से मांग विश्लेषण के क्षेत्र में दो वस्तुओं का मांग फलन दिए हुए होने की स्थिति में आप यह ज्ञात कर सकेंगे कि दोनों वस्तुएं परस्पर पूरक हैं, अथवा प्रतियोगी। इसी प्रकार उत्पादन विश्लेषण में सीमान्त लागत ज्ञात कर सकेंगे।

इसके अतिरिवत आपको समरूप फलन आयेलर प्रमेय (Euler's Theroem) से भी परिचित जायेगा। इकाई के अन्त में बिना प्रतिबन्धों के फलन में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दुओं को ज्ञात करने की तकनीकी से आपको अवगत कराया जायेगा।

6.2 आंशिक अवकलन : अर्थ व उनकी संक्रियाएं

(Partial Differentiation : Meaning & their operations)

इस इकाई की प्रस्तावना में यह स्पष्ट किया जा चुका है कि आंशिक अवकलन में फलन में दो अथवा दो से अधिक चर होते हैं। निर्भर चर में परिवर्तन ज्ञात करने के लिए एक एक स्वतंत्र चर को लिया जाता

है एवं ऐसा करते समय दो चरों का फलन एक चर के फलन का रूप ग्रहण कर लेता है इसे आंशिक अवकलन (Partial derivative) की विधि कहा जाता है। इस विधि का प्रयोग दो से अधिक चरों की दशा में भी हो सकता है।

$Z = f(x, y)$ फलन का आंशिक अवकलन ज्ञात करने के लिए y को स्थिर रखकर पहले x के सन्दर्भ में z का अवकलन $\frac{\partial z}{\partial x}$ ज्ञात करेंगे। इसे fx अथवा zx से भी सूचित किया जाता है। इसी प्रकार बाद में x को स्थिर रखकर y के सन्दर्भ में z का अवकलन $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात करेंगे। इसे fy अथवा zy में सूचित किया जाएगा।

अतः आंशिक अवकलन में जिस चर के सन्दर्भ में अवकलन किया जाता है उसे परिवर्तनशील माना जाता है और अन्य को स्थिर माना जाता है। इससे अवकलन में कोई कठिनाई नहीं आती एवं एक चर के अवकलन की विधि ही काम में ली जाती है।

इस इकाई में हम आंशिक अवकलन के अर्थशास्त्र में प्रयोगों का अध्ययन करेंगे। इससे यह स्पष्ट हो जाएगा कि आंशिक अवकलन की विधि अत्यन्त उपयोगी है। नीचे आंशिक अवकलन ज्ञात करने के कुछ उदाहरण दिये गये हैं :

यदि $z = 4x^3 + 2y^3 + 5$ तो इसका आंशिक अवकलज ज्ञात करें।

हल $\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2$ (यहाँ y को स्थिर रखा गया है; अतः $2Y^1$ तथा 5 के अवकलज शून्य के बराबर हैं)

$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2$ (यहाँ x को स्थिर रखा गया है; अतः $4x^1$ तथा 5 के अवकलज शून्य के बराबर हैं)

उदाहरण :

निम्न फलनों में z के मूल्य दिये हुए हैं; इनमें $\frac{\partial z}{\partial x}$ व $\frac{\partial z}{\partial y}$ निकालिए।

(i) $2xy - \log xy$

(ii) $e\, 3x^2+2y^2$

(iii) $\sqrt{xy}$

हल : Answer

(i) $z = 2xy - \log xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - \frac{1}{xy}.y = 2y - \frac{1}{x}.$$ (y को स्थिर रख कर)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - \frac{1}{xy}.x = 2x - \frac{1}{y}.$$ (x को स्थिर रख कर)

(ii) $z = e^{3x^2+2y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{3x^2+2y^2}.(bx) = 6xz^{3x^2+2y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{3x^2+2y^2}.(4y) = 4ye^{3x^2+2y^2} = 4yz$$

(iii) $z = \sqrt{xy}$ or $z = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left(\therefore \sqrt{xy} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

6.3 द्वितीय व उच्चतर क्रम के आंशिक अवकलज

(Second and Higher order differentiation)

अब तक हमने प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज निकाले हैं। इसी विधि से आगे बढ़ने पर द्वितीय व अन्य उच्च क्रम के अवकलज निकाले जा सकते हैं।

यहाँ पर यह स्मरण रखना होगा कि द्वितीय क्रम के चार आंशिक अवकलज होते हैं जो नीचे दिये जाते हैं :

(i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = fxx$ (यहाँ z फलन का x के सन्दर्भ में दो बार अवकलज निकाला जाता है।)

(ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial y dx} = fyx$ (यहाँ पहले x के सन्दर्भ में तथा फिर y के सन्दर्भ में अवकलन लिए जाते हैं।)

(iii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = fxy$ (पहले y के सन्दर्भ में तथा फिर x के सन्दर्भ में अवकलन लिये जाते हैं।

(iv) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = fyy$ (दोनों बार y के सन्दर्भ में अवकलन लिए जाते हैं।)

ऊपर वर्णित चार द्वितीय क्रम के अवकलजों में fxx तथा fyy प्रत्यक्ष आंशिक अवकलन (direct partial derivatives) कहलाते हैं; तथा fyx तथा fxy तिरछे या आड़े आंशिक अवकलज (Cross partial derivatives) कहलाते हैं। स्मरण रहे कि यहाँ fyx व fxy के परिणाम समान होंगे। अतः अवकलन किस क्रम में लिया जाता है, इसका अन्तिम परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

उदाहरण : यदि $z = x^2y^2$ हो तो द्वितीय क्रम के चारों आंशिक अवकलज (Zxx, Zyx, Zxy तथा Zyy) निकालिए।

हल : Answer (Solution)

(i) $zxx = fxx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ होता है। अतः x के सन्दर्भ में दो बार अवकलज लेने होंगे।

$Z = x^2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2$$

(ii) $Zyx = fyx = \frac{\partial^2 z}{\partial y dx}$ होता है। अतः पहले x के सन्दर्भ में तथा बाद में y के सन्दर्भ में अवकलज लेने होंगे।

$$Z - x^2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y dx} = 4xy$$

(iii) $zxy = fxy \frac{\partial^2 z}{\partial x dy}$ होता है। अतः पहले y के सन्दर्भ में तथा बाद में x के सन्दर्भ में अवकलज लेने होंगे।

$$Z = x^2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = 4xy$ जो बराबर है $\frac{\partial^2 z}{\partial y dx}$ के।

(iv) $zyy = fyy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ होता है। अतः दो बार y के सन्दर्भ में आंशिक अवकलज लेने होंगे।

$$Z = x^2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

बोध प्रश्न 1

1. निम्नलिखित फलनों में आंशिक अवकलज (partial derivatives) निकालिए $\left\langle \frac{\partial z}{\partial x} \text{ व } \frac{\partial z}{\partial y} \right\rangle$

(i) $Z = 4x^3 + 10x^2y + xy^2 + y^3$

(ii) $Z = e^{xy}$

(iii) $Z = \log(e^x + e^y)$

2. निम्नलिखित फलन में द्वितीय क्रम के चारों अवकलन निकालिए (Zxx, Zyx, Zxy तथा Zyy)

$Z = xy^2 + yx^2$

आंशिक अवकलजों के अब तक के अभ्यास की सहायता से कई तरह के प्रश्न हल किये जा सकते हैं।

उदाहरण (Example)

यदि $Z = \frac{x^2y^2}{x+y}$ हो तो $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान निकालिए।

हल (Solution)

$$z = \frac{x^2y^2}{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)2xy^2 - x^2y^2.1}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{2x^2y^2 + 2xy^3 - x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{2xy^3 + x^2y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)2x^2y - x^2y^2.1}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{2x^3y + 2x^2y^2 - x^2y^2.1}{(x+y)^2} = \frac{2x^3y + x^2y^2}{(x+y)^2}$$

$$\therefore\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y^3 + x^3y^2}{(x+y)^2} + \frac{2x^3y^2 + x^2y^3}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{2x^2y^3 + x^3y^2 2x^3y^2 + x^2y^3}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^3 + 3x^3y^2}{(x+y)^2} = \frac{3x^2y^2 + (x+y)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2}{x+y} = 3z$$

$$\left\langle \therefore\ z = \frac{x^2y^2}{x+y} \right\rangle$$

बोध प्रश्न 2

(i) यदि $Z = \log(x^2 + y^2)$ हो तो Zxx + Zyy का मान निकालिये

....

....

....

6.3.1 कुल अवकलन (The Total Differential)

एक फलन

$w = f(x, y, z)$ का कुल अवकलन इस प्रकार परिभाषित किया जाएगा।

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

अलग अलग अंगों $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial w}{\partial z}$ को w के क्रमशः x, y तथा z के सन्दर्भ में आंशिक अवकलन कहेंगे। किसी फलन के आंशिक अवकलनों का योग ही कुल अवकलन कहा जाता हे।

सामान्य रूप में एक फलन,

$w = f(x_1, x_2, x_3 ..... x_n)$ का कुल अवकलन इसके सभी आंशिक अवकलनों का योग होगा

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_i$$

अगर x किसी दूसरे चर t के सम्बन्ण में अवकलन योग्य फलन है तो,

$$dwi = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

एवं यदि x किन्हीं दो चरों r एवं s के सन्दर्भ में अवकलन योग्य है तो,

$$dx_i = \frac{\partial x_1}{\partial r} dr + \frac{\partial x_i}{\partial s} ds$$

उदाहरण :

यदि $Z = 2x^3 - 4xy^2 + 3y^3$

$dz = 6x^2\,dx - 4\,y^2\,dx$

$- 8\,xy\,dy + 9y^2dy$

$= (6\,x^2 - 4y^2)\,dx + (9y^2 - 8xy)\,dy$

6.3.2 कुल अवकलज (The Total Derivative)

यदि फलन $w = f(x, y, z)$ के $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ एवं $\frac{\partial w}{\partial z}$

सतत् आंशिक अवकलज है एवं x, y एवं z किसी अन्य चर t के फलन है तब,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$\frac{dw}{dt}$ को w का t के सन्दर्भ में कुल अवकलज कहेंगे। इस प्रकार $\frac{dw}{dt}$ के परिवर्तन होने पर w में परिवर्तन की दर को व्यक्त करता है। इसके साथ ही w केवल t का फलन है। कुल अवकलज प्राप्त करने के लिये कुल अवकलन में Δt का भाग देते हैं एवं Δt का सीमांत शून्य है।

6.4 विविध प्रश्न

निम्नलिखित फलनों में z के मूल्य दिये हुए है;

$\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ निकालिए

(1) $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$

(2) $2x^2 + 3xy - 6y^2$

(3) $x2 + xy + y^2$

(4) $4x^3 y^2 + 3xy^3$

(5) $\log(x^3 + y^4)$

6.5 प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

(i) $\frac{\partial z}{\partial x} = 10x^2 + 2xy + 3y^2$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} = xz$

(iii) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$

(2) $Zxx = 2y$

$Zyx = 2y + 2x$

$Zxy = 2y + 2x$

$Zyy = 2x$

बोध प्रश्न 2

(1) $Zxx + Zyy$

अथवा

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

विविध प्रश्न

(i) $\frac{\partial z}{\partial x} = x(5x^3 + 3xy^2 - 2y^3)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y(2x^3 + 3x^2y - 5y^3)$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x - 12y$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^2(4x^2 + y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = xy(8x^2 + 9y)$

(5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^4}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^3 + y^4}$

6.6 आंशिक अवकलज तथा मांग विश्लेषण

यदि दो परस्पर सम्बन्धित वस्तुओं की मांगी जाने वाली मात्रा क्रमशँ x_1 एवं x_2 एवं इनकी कीमतें p_1 एवं p_1 हैं तो इनका मांग-फलन निम्नानुसार व्यक्त किया जाएगा

$x_1 = f(p_1\ p_1)$ एवं

$x_1 = g(p_1\ p_1)$

यहाँ x_1 एवं x_1 क्रमशः X_1 तथा X_1 वस्तुओं की मात्राओं तथा p_1 एवं p_1 उनकी कीमतों को इंगित करते हैं। f एवं g फलन के सूचक हैं।

x_1 तथा x_2 के आंशिक अवकलन सीमान्त माँग फलन कहे जाएँगे। हम उपर्युक्त फलन से चार सीमान्त मांग फलन प्राप्त कर सकते हैः

(i) $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ यह p_1 के सन्दर्भ में x_1 की सीमान्त मांग है,

(ii) $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$ यह p_2 के सन्दर्भ में x_2 की सीमान्त मांग है,

(iii) $\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$ यह p_1 के सन्दर्भ में x_2 की सीमान्त मांग है,

(iv) $\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$ यह p_2 के सन्दर्भ में x_2 की सीमान्त मांग है।

इन चार सीमान्त माँग-फलनों की सहायता से हम वस्तुओं की प्रऔति (nature of commodities) का पता लगा सकते हैं। वस्तुएं एक दूसरे की प्रतियोगी (Competitive) हो सकती हैं, अथवा पूरक (Complementary) हो सकती हैं।

6.6.1 प्रतियोगी वस्तुओं की पहचान

(अ) यदि p_1 के बढ़ने से x_1 की मात्रा घटे तथा x_1 की मात्रा बढ़े तो वस्तुएँ परस्पर प्रतियोगी होंगी।

आंशिक अवकलज की भाषा में यहाँ $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$ होगा (चूँकि p_1 के बढ़ने से x_1 की मात्राा बढ़ेगी)

तथा $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ होगा (चूँकि p_1 के बढ़ने से x_1 की मात्रा घटेगी)

(आ) इसी प्रकार p_1 के बढ़ने पर x_1 की मात्रा के घटने तथा x_1 की मात्रा के भी घटने पर दोनों वस्तुएं एक दूसरे की पूरक मानी जायेंगी।

यहाँ $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < 0$ होगा तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$ भी < 0 होगा।

6.6.2 पूरक वस्तुओं की पहचान

(अ) यदि p_1 के बढ़ने से x_1 की मात्रा घटे और साथ में x_2 की मात्रा भी घटे तो दोनों वस्तुएं एक दूसरे की पूरक कहलायेंगी।

आंशिक अवकलज के रूप में, $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ एवं $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$ की दो शर्तें लागू होगी (जब हम p_1 से परिवर्तन लेते हैं।)

यहाँ $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$ होगा तथा $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$ भी < 0 होगा।

अतः हम ऊपरवर्णित आंशिक अवकलजों को निकाल कर यह निश्चित कर सकते हैं कि दो वस्तुऐं परस्पर प्रतियोगी हैं या पूरक।

उदाहरण :

निम्न माँग-फलनों में वस्तुओं की प्रकृति छांटिए—

$x_1 = 15 - 2p_1 + p_2$ .... (1)

$x_2 = 16 + p_1 - p_2$ .... (2)

हल : (Solution)

$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 1 > 0$ (फलन 1 को लेने पर)

$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 1 > 0$ (फलन 2 को लेने पर)

अतः दोनों वस्तुएं एक दूसरे की प्रतियोगी हैं; क्योंकि p_2 के बढ़ने से x_1 की माँग बढ़ती है तथा p_1 के बढ़ने से x_2 की माँग बढ़ती है जो उनके प्रतियोगी होने को दशा को दर्शाती हैं।

Exercise 1

यदि $x_1 = 15 - 4\,p_1 + p_2$

एवं $x_2 = 7 + p_1 - p_2$ हो तो वस्तुओं की प्रकृति का पता लगाइए।

Exercise 2

यदि $x_1 = 15 - 3\,p_1 - p_2$

तथा $x_2 = 8 - 2p_1 - 3p_2$ हो तो दोनों वस्तुओं की प्रकृति का पता लगाइए।

6.6.3 मांग की आंशिक लोच

मांग की आंशिक लोचें भी चार प्रकार की होती हैं। पुनः

यदि $x_1 = f\,(p_1, p_2)$ एवं

$x2 = g\,(p_1, p_2)$ हो तो माँग की चार आंशिक लोचों के सूत्र इस प्रकार होंगे।

(i) $\dfrac{Ex_1}{Ep_1} = \dfrac{p_1}{x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}$ (लोच का सूत्र $\dfrac{\frac{\partial x_1}{x_1}}{\frac{\partial p_1}{p_1}}$ होता है)

(यह p_1 कीमत के सन्दर्भ में x_1 की माँग की आंशिक लोच है; p_2 स्थिर रख कर)

(ii) $\dfrac{Ex_1}{Ep_1} = \dfrac{p_1}{x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial p_2}$ (p_2 के सन्दर्भ में x_1 की माँग की आंशिक लोच, p_1 स्थिर रखकर)

(iii) $\dfrac{Ex_2}{Ep_1} = \dfrac{p_1}{x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial p_1}$ (p_1 के सन्दर्भ में x_2 की मांग की आंशिक लोच p_2 स्थिर रखकर)

(iv) $\dfrac{Ex_2}{Ep_2} = \dfrac{p_2}{x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial p_2}$ (p_2 के सन्दर्भ में x_2 की माँग की माँग की आंशिक लोच, p_1 स्थिर रखकर)

उदाहरण :

यदि $x_1 = \frac{4}{p_1 p_2}$

तथा $x_2 = \frac{16}{p_1 p_2}$ हो तो माँग की चारों आंशिक लोचें निकालिए।

हल : **Solution**

पहले हम चार आंशिक अवकलज निकालेंगे।

(i) $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{4}{(p_1)^2 p_2}$ (iii) $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{4}{(p_2)^2 p_1}$

(ii) $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{16}{(p_1)^2 p_2}$ तथा (iv) $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = -\frac{16}{(p_2)^2 p_1}$

(पावर नियम का उपयोग करने पर, जैसे $x_1 = \frac{4}{p_1 p_2} = \frac{4(p_1)^{-1}}{p_2}$ लेने पर

$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{4(-1)(p_1)^{-2}}{p^2} = \frac{-4}{(p_1)^2 p2}$ होगा)

अब चार आंशिक लोचें इस प्रकार निकाली जायेंगी :

(i) $\frac{Ex_1}{Ep_1} = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$

$\frac{p_1}{x_1} = \frac{-4}{(p_1)^2 p_2}$ ($x_1 = \frac{4}{p_1 p_2}$ प्रतिस्थापित करने पर)

$= -1$

(ii) $\frac{Ex_1}{Ep_2} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2}$

$= \frac{p_1 (p_2)^2}{4} \cdot \frac{-4}{(p_2)^2 p_1} = -1$

(iii) $\frac{Ex_1}{Ep_1} = \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1}$

$= \frac{(p_1)^2 p_2}{16} \cdot \frac{-16}{(p_1)^2 p_2} = -1$

(iv) $\frac{Ex_2}{Ep_2} = \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2}$

$= \frac{p_1 (p_2)^2}{16} \cdot \frac{-16}{(p_2)^2 p_1} = -1$

इस प्रकार इस उदाहरण में चारों आंशिक लोचें -1 के बराबर है।

आय-लोच की गणना की विधि—

यदि किसी वस्तु की माँग का फलन उसकी कीमत व आमदनी के रूप में दिया हुआ हो तो हम उसकी कीमत-लोच व आय-लोच आंशिक अवकलजों का उपयोग करके आसानी से निकाल सकते हैं।

उदाहरण:— $Q = 800 - 2P + Y$ है जहाँ Q वस्तु मात्रा व P उसकी कीमत तथा Y आमदनी को सूचित करते हैं। $P = 50$ व $Y = 100$ इकाई पर माँग की कीमत-लोच तथा माँग की आय-लोच ज्ञात कीजिए।

हल : **Solution**

$$Q = 800 - 2P + Y$$

माँग की कीमत-लोच $= \frac{P}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P}$

$P = 50$ व $Y = 100$ पर

$$Q = 800 - 2\,(50) + 100 = 800 - 100 + 100 = 800$$

$\frac{\partial Q}{\partial P} = -2$ (Y = आमदनी, को स्थिर मानने पर तथा P के संदर्भ में अवकलज लेने पर)

$\therefore$ कीमत-लोच $= \frac{P}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{50}{800}(-2) = \frac{1}{8} = -.125$

माँग की आय-लोच $= \frac{Y}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial Y}$

$\frac{\partial Q}{\partial Y} = 1$ (फलन में P को स्थिर मानने पर तथा Y के संदर्भ में अवकलज लेने पर)

$\therefore$ आय-लोच $= \frac{100}{800} \times 1 = \frac{1}{8} = 0.125$

Exercise 6

$Z = 400 - 4P + Y$ में $P = 10$ तथा $Y = 120$ पर माँग की आय-लोच ज्ञात कीजिए।

6.7 आंशिक अवकलज तथा उत्पादन विश्लेषण

उत्पादन-विश्लेषण में आंशिक अवकलज के प्रयोग—एक वस्तु का उत्पादन श्रम, पूँजी, भूमि व अन्य साधनों की मात्रा पर निर्भर करता है। एक साधन की सीमान्त उत्पादकता निकालने के लिए उसकी मात्रा में परिवर्तन का प्रभाव कुल उत्पत्ति पर देखा जाता है, उस समय अन्य साधनों की मात्राएं स्थिर रखी जाती है।

उदाहरण :

यदि $X = AL^{\alpha} K^{\beta}$ (जहाँ L = श्रम, K = पूँजी तथा X = उत्पत्ति की मात्रा को सूचित करते हैं), तो श्रम व पूँजी की सीमान्त उत्पादकता निकालिए तथा उनका अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : Solution

$$X = AL^{\alpha} K^{\beta}$$

श्रम की सीमान्त उत्पादकता $= \frac{\partial X}{\partial L} = A_{\alpha}L^{\alpha-1}K^{\beta}$ (k को स्थिर रखकर तथा श्रम को परिवर्तित करने पर)

पूँजी की सीमान्त उत्पादकता $= \frac{\partial X}{\partial K} = A_{\beta}L^{\alpha}K^{\beta-1}$ (L को स्थिर रखकर तथा पूँजी को परिवर्तित करने पर)

श्रम व पूँजी की सीमान्त उत्पादकता का परस्पर अनुपात

$$\frac{MPP_L}{MPP_K} = \frac{A_{\alpha}L^{\alpha-1}K^{\beta}}{A_{\beta}L^{\alpha}K^{\beta-1}}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}.\frac{K}{L}$$

Question

प्रश्न : उपर्युक्त उत्पादन-फलन में दोनों साधनों की उत्पादन-लोच निकालिए तथा α व β का आर्थिक आशय स्पष्ट कीजिए।

$$X = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

एक साधन की उत्पादन--लोच का आशय है कि दूसरे साधन को स्थिर रखकर, उस साधन की मात्रा के बढ़ने पर कुल उत्पादन, अर्थात् x में कितनी वृद्धि होगी।

प्रथम विधि : दोनों तरफ लॉग लेने पर

$$\log X = \log A + \alpha \log L + \beta \log K$$

$\frac{\partial \log X}{\partial \log L} = \alpha$ (log L के संदर्भ में अवकलज लेने पर, log k, आदि स्थिर रखते हुए)

यहाँ श्रम की उत्पादन-लोच $\frac{\partial \log X}{\partial \log L}$ से सूचित की जाती है।

अतः α श्रम की उत्पादन-लोच (Output-elasticity) है।

इसी प्रकार $\frac{\partial \log X}{\partial \log K} = \beta$ होगी, अर्थात् पूँजी की उत्पादन-लोच $= \beta$ होगी

द्वितीय विधि : दोनों साधनों की उत्पादन की लोच निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग भी किया जा सकता है। उत्पादन-फलन : $X = AL^{\alpha}K^{\beta}$

श्रम की उत्पादन-लोच $= \frac{L}{X}.\frac{\partial X}{\partial L}$ $\left\langle \text{यह } \frac{\frac{\partial X}{X}}{\frac{\partial L}{L}} \right\rangle$

$= \frac{L}{X}.A_{\alpha}L^{\alpha-1}K^{\beta}$ (पूर्व निकाले गये परिणाम के आधार पर)

$$= \frac{AaL^{a}K^{\beta}}{AL^{\alpha}K^{\beta}} = \alpha \quad (\because x = AL^{a}K^{\beta} \text{ है})$$

इसी प्रकार पूंजी की उत्पादन-लोच $\frac{k}{x}.\frac{\partial x}{\partial k}$ $\left\langle \text{अह} = \frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial k}{k}} \right\rangle$

$$= \frac{k}{x}.ABL^{\alpha}K^{\beta-1}$$

$$= \frac{AbL^{a}K^{\beta}}{AL^{a}K^{\beta}} = \beta$$

इस प्रकार α व β क्रमशः श्रम की उत्पादन-लोच व पूँजी की उत्पादन-लोच हैं।

6.7.1 कुल उत्पत्ति के वितरण में आंशिक अवकलजों के प्रयोग

हम सरल विवेचन को दृष्टि से एक कोब-डग्लस (Cobb-Douglas) उत्पादन-फलन ले लेते हैं जो पैमाने के स्थिर प्रतिफल दर्शाता है। यहाँ $\alpha + \beta = 1$ है।

पुनः $X = AL^{\alpha}K^{\beta}$ है, जहाँ $\alpha + \alpha = 1$ माना गया है।

अब हम श्रम को प्राप्त होने वाला कुल प्रतिफल तथा पूँजी को प्राप्त होने वाला कुल प्रतिफल निकालेंगे।

श्रम को प्राप्त होने वाला कुल प्रतिफल = श्रम की मात्राा X (गुणा) श्रम की सीमान्त उत्पत्ति होगा।

$= L \cdot A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$

$= A\,\alpha\,L^{\alpha}K^{\beta} = \alpha\,x\,(\quad X = AL^{\alpha}K^{\beta})$

इसी प्रकार पूँजी को प्राप्त होने वाला कुल प्रतिफल = पूँजी की मात्राा X पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति होगा।

$= K.A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$

$= A\beta\,L^{\alpha}K^{\beta} = \beta\,X$

अतः कुल उत्पत्ति में श्रम का कुल प्रतिफल $= \alpha\,x$

तथा पूँजी का कुल प्रतिफल $= \beta x$ होगा।

Exercise 4

यदि उत्पादन-फलन इस प्रकार हो :

$Q = SLK - 2L^2 - 2K^2$ (जहाँ Q उत्पत्ति, L श्रम व K पूँजी के सूचक हैं) तो $\frac{\partial Q}{\partial L}$ एवं $\frac{\partial Q}{\partial K}$ निकालिए और अर्थशास्त्र में इनका अर्थ लिखिए।

Exercise 5

निम्न उत्पादक-फलन पर ध्यान दें :

$Q = L^{2/3}K^{2/3}$ (जहाँ L श्रम की मात्रा व K पूँजी की मात्रा हैं)

यदि प्रत्येक साधन को सीमान्त उत्पत्ति के मूल्य के बराबर भुगतान किया जाए तो कुल भुगतान कितना करना पड़ेगा ? क्या वह सम्भव हो पाएगा ?

6.8 समरूप फलन

6.8.1 समरूप फलन का अर्थ

एक फलन n डिग्री का समरूप फलन तब कहलाता है। जब इसके प्रत्येक स्वतन्त्र चर को एक स्थिर राशि k से गुणा करने पर उस फलन का मूल्य K^n गुना हो जाता है। जैसे--

यदि $Z = f(x, y)$ में यह विशेषता हो कि एक स्थिर राशि k के लिए

$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ हो, तो Z को n डिग्री का समरूप फलन कहा जायेगा। यदि n धनात्मक हो $(n > 0)$ तो वह फलन धनात्मक समरूप (positively homogeneous) कहा जायेगा; $n = 1$ होने पर वह फलन रैखिक समरूप (linearly homogeneous) कहा जायेगा; $n = o$ होने पर वह शून्य डिग्री का फलन homogeneous of degree zero) कहा जायेगा। इस प्रकार n के 1 से अधिक, 1 बराबर तथा 1 से कम होने पर उसी के अनुरूप डिग्री वाला समरूप फलन माना जायेगा। स्मरण रहे कि k के धनात्मक वास्तविक मूल्य (positive real values) ही लिए जाते हैं।

फलन की समरूपता की डिग्री की जाँच के लिए निम्न उदाहरण दिये जाते हैं।

(1)$Z = 4x + 5y$ यह एक डिग्री की समरूपता का फलन है, क्योंकि $f(kx, ky) = 4\,kx + 5\,ky = k(4x + 5\,y)$, चूँकि यहाँ k घातांक या डिग्री 1 है, इसलिए यह एक डिग्री की समरूपता वाला फलन है।

(2)$z = x^2 + xy + y^2$ यह दो डिग्री की समरूपता वाला फलन है, क्योंकि $f(kx, ky) = (kx)^2 + (kx)(ky) + (ky)^2$

$= k^2(x^2 + xy + y^2)$ अतः k पर डिग्री = 2 है।

(3)$Z = x^{0.2}y^{0.4}$ यह एक से कम डिग्री का समरूप फलन कहलायेगा क्योंकि $f(kx, ky) = (kx)^{0.2} (ky)^{0.4}$

$= k^{0.2}(x^{0.2}y^{0.4}) = k^{0.6}(x^{0.2}y^{0.4})$

यहाँ k पर डिग्री या पावर 0.6 है जो एक से कम है। अतः यह फलन एक से कम डिग्री वाला समरूप फलन कहलायेगा।

(4) $z = \frac{x}{y}$ यह शून्य डिग्री का समरूप फलन है।

क्योंकि $(k, ky) = z = \frac{kx}{ky} = 1(\frac{x}{y})$ चूंकि $\frac{k}{k} = k^0 = 1$

यहाँ k पर डिग्री o है; इसलिए यह शून्य डिग्री का समरूप फलन है।

(5)$Z = x^2 + 2xy + y$, यह फलन समरूप फलन नहीं है, क्योंकि k को पूर्णतया बाहर नहीं किया जा सका है, जैसे

$f(kn, ky) = (kx)^2 + 2(kx)(ky) + ky$

$= k(kx^2 + 2\,k\,xy + y)$

अतः जब तक k को पूर्णतया बाहर नहीं निकाला जा सकता तब तक फलन समरूप नहीं बनता।

6.8.2 एक आवश्यक स्पष्टीकरण (Important Clarification)

उत्पादन-फलनों के विवेचन में प्रथम या एक डिग्री के समरूप फलनों का काफी उपयोग होता है। इन्हें

प्राय-रेखिकीय समरूप फलन (linearly homogeneous functions) कहा जाता है। इसका अर्थ केवल यह है कि ये फलन एक डिग्री के समरूप फलन (homogeneous of degree one or first degree) होते हैं। लेकिन कुछ लेखक इनको रेखीय समरूप फलन (linear homogeneous function) अथवा रेखीय व समरूप फलन (linear and homogeneous function) कह देते हैं जिससे ऐसा लगता है कि इनका रेखीय (linear) होना आवश्यक है। लेकिन यह सही नहीं है, क्योंकि प्रथम डिग्री के समरूप फलन के लिए सदैव रेखीय होना आवश्यक नहीं होती। **अतः रेखिकीय समरूप फलन की केवल यह शर्त है कि यह प्रथम डिग्री का समरूप फलन हो (a linearly homogeneous function must be homogeneous of first degree)** यह सदैव रैखिक नहीं होता, जैसा कि निम्न उदाहरण से स्पष्ट होता है—

$$f(x, y, w) = \frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x}$$

$$f(kx, ky, kw) = \frac{(kx)^2}{(ky)} + \frac{2(kw)^2}{(kx)}$$

$$= k\left(\frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x}\right) = kf(x, y, w)$$

अतः यह फलन एक (प्रथम) डिग्री का समरूप फलन है, क्योंकि k की पावर या डिग्री एक है। **लेकिन यह रेखीय (linear) फलन नहीं है।** अतः रेखिकीय समरूप फलन के लिए केवल प्रथम डिग्री या एक डिग्री की समरूपता ही जरूरी है। यह स्पष्टीकरण अल्फा सी. च्यॉंग (Alpha C. Chiang) की पुस्तक—Fundamental Methods of Mathematical Economics में काफी जोर देकर प्रस्तुत किया गया है ताकि पाठक अनावश्यक भ्रम से बच सकें।

6.9 ओयलर का प्रमेय (Euler's Theorem)

समरूप फलनों में ओयलर का प्रमेय (Euler's Theorem)* लागू होता है—

यदि $Z = f(x, y)$ फलन n डिग्री तक धनात्मक समरूप हो और प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज निकाले जा सकें तो :

$\frac{x\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nf(x, y)$ नामक सम्बन्ध को ओयलर का थ्योरम (Euler's Theorem) कहा जाता है। नीचे कुछ उदाहरणों में फलन की समरूपता की डिग्री का पता लगाकर ओयलर की थ्योरम दर्शायी गयी है। स्मरण रहे कि यदि फलन समरूप नहीं है तो ओयलर की थ्योरम के लागू होने का प्रश्न ही नहीं उठता। अतः ओयलर की थ्योरम लागू करने से पूर्व यह देखना आवश्यक होता है कि फलन समरूप है अथवा नहीं। अर्थशास्त्र में विशेषतया रेखिकीय समरूप उत्पादन-फलनों (linearly homogeneous production functions) की दशा में ओयलर की थ्योरम का उपयोग देखा जाता है। पैमाने के स्थिर प्रतिफलों की स्थिति में यदि प्रत्येक साधन को उसकी सीमान्त उत्पत्ति के बराबर भुगतान किया जाता है तो सारी उत्पत्ति का वितरण साधनों में हो जाता है। उस स्थिति में ओयलर का थ्योरम ''जोड़ का थ्योरम'' (Adding-up theorem) बन जाता है। सारी उत्पत्ति साधनों के बीच बंट जाती है, कुछ भी शेष नहीं बचता, और न किसी प्रकार का अभाव रहता है। इस सम्बन्ध में पहले उदाहरण दिया जा चुका है।

समरूप फलनों की एक विशेषता* ओयलर की थ्योरम का लागू होना है जो निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जाती है :

---

* लिनोनार्ड ओयलर (1707-83) स्विट्जरलैण्ड का एक गणितज्ञ था। ओयलर की थ्योरम का व्यष्टि अर्थशास्त्र के उच्चस्तरीय अध्ययन में काफी उपयोग होता है।

उदाहरण :

$$z = \frac{x^2+xy}{y} \qquad \text{अथवा} \qquad f(x,y) = \frac{x^2+xy}{y} \text{ है।}$$

* अन्य विशेषताएं गणितीय ढंग की हैं, इसलिए उनका यहाँ विवेचन नहीं किया गया है। अर्थशास्त्र के विद्यार्थियों को ओयलर की थ्योरम पर ही विशेष ध्यान केन्द्रित करना चाहिए।

$$f(kx,ky) = \frac{(kx)^2+(kx)(ky)}{ky} = k(\frac{x^2+xy}{y})$$

$$= k\,f(x,y)$$

अतः यह एक डिग्री या प्रथम डिग्री का समरूप फलन है, अथवा रेखिकीय समरूप फलन है, इसलिए ओयलर की थ्योरम के अनुसार

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = f(x,y) \text{ होना चाहिए}$$

$$z = \frac{x^2+xy}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y(x) - 1(x^2+xy)}{y^2}$$

$$= \frac{xy - x^2 - xy}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x(\frac{2x+y}{y}) + y(\frac{-x^2}{y^2})$$

$$= \frac{2x^2+xy}{y} - \frac{x^2}{y} = \frac{2x^2+xy-x^2}{y} = \frac{x^2+xy}{y} = z = f(x,y)$$

अतः इसमें ओयलर की थ्योरम लागू होती है।

Exercise 6

(i) निम्न फलनों की समरूपता का पता करिए :

(अ) $z = x^3 + 2xy + y^3$

(ब) $z = \dfrac{x^2+3xy+y^2}{y^2}$

Exercise 7

यदि $z = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ हो तो फलन की समरूपता निकालिए तथा ओयलर की थ्योरम दर्शाइए।

6.10 आंशिक अवकलजों के प्रयोग के कुछ और सामान्य उदाहरण

आंशिक अवकलजों की विधियों, समरूप फलनों व ओयलर की थ्योरम का वर्णन करने के बाद नीचे आंशिक अवकलजों के प्रयोग के कुछ और उपयोगी दृष्टान्त प्रस्तुत किये जाते हैं। अब तक के अभ्यास की सहायता से इनका समझने में सुगमता रहेगी।

एक फर्म का कुल लागत फलन $c = 8x^2 + 6y^2 - 2xy - 40x - 42y + 180$ है। वह x व y दो वस्तुओं का उत्पादन करती है। लागत न्यूनतम करने के लिए वह दोनों वस्तुओं का कितना-कितना उत्पादन करेगी ?

हल : Solution

$$C = 8x^2 + 6x^2 - 2xy - 40x - 42y + 180$$

$$f_x = \frac{\partial c}{\partial x} = 16x - 2y - 40 = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$f_y = \frac{\partial c}{\partial y} = 12y - 2x - 42 = 0 \qquad \text{...........(2)}$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर $x = 3$ व $y = 4$ आयेगा

$fxx = 16$ तथा $fyy = 12$ दोनों > 0 हैं।

$fxx = -2$ अतः $f^2xy = (-2)^2 = 4$ है।

$\therefore \Delta = fxx\ fyy - f^2xy = 16 \times 12 - 4$

$= 188 > 0$

इसलिये $\Delta > 0$, तथा fxx व fyy दोनो के > 0 होने पर फलन के न्यूनतम होने की शर्त पूरी होती है।

अतः $x = 3$ व $y = 4$ पर कुल लागत न्यूनतम हो पायेगी।

यदि $Z = AL^{0.7} C^{0.3}$ है, जहाँ Z उत्पत्ति, L श्रम व C पूँजी की मात्रा के सूचक है तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) क्या यह समरूप फलन है ? यदि हाँ तो समरूपता की डिग्री निकालिए।

(ii)सिद्ध कीजिए कि श्रम की औसत उत्पत्ति व पूँजी की औसत उत्पत्ति का अनुपात श्रम व पूँजी की मात्राओं के परस्पर अनुपात के व्यक्त हो सकेगा।

(iii) सिद्ध कीजिए कि श्रम की सीमान्त उत्पत्ति व पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति का अनुपात भी श्रम व पूँजी की मात्राओं के अनुपात में व्यक्त हो सकेगा।

(iv) यदि प्रत्येक साधन का प्रतिफल सीमान्त उत्पत्ति के बराबर हो तो सिद्ध करिए कि कुल उत्पत्ति का वितरण हो जायेगा और कुछ और आधिक्य या अभाव नहीं रहेगा।

हल : Solution

(i) $Q = AL^{0.7} C^{0.3} = f(L,K)$

$\therefore f(KL, KC) \quad = A(AL)^{0.7}(KC)^{0.3}$ (प्रत्येक साधन को k गुना बढ़ाने पर)

$= AK^{0.7} L^{0.7} K^{0.3} C^{0.3}$

$= AKL^{0.7} C^{0.3}$

$= K f(L,K)$

यहाँ k की पावर 1 है, अतः यह प्रथम डिग्री का समरूप फलन है, अथवा रेखिकीय समरूप फलन है।

$$\text{(ii)श्रम की औसत उत्पत्ति} = \frac{Q}{L} = \frac{AL^{0.7}C^{0.3}}{L} = \frac{AC^{0.3}}{L^{0.3}} = A\left(\frac{C}{L}\right)^{0.3}$$

$$\text{पूँजी की औसत उत्पत्ति} = \frac{Q}{C} = \frac{AL^{0.7}C^{0.3}}{C} = \frac{AL^{0.7}}{C^{0.7}} = A\left(\frac{L}{C}\right)^{0-7}$$

$$\text{अतः } \frac{\text{श्रम की औसत उत्पत्ति}}{\text{पूँजी की औसत उत्पत्ति}} = \frac{A\left(\frac{C}{L}\right)^{0.3}}{A\left(\frac{L}{C}\right)^{0.7}} = \frac{C^{0.3}}{L^{0.3}} \cdot \frac{C^{0.7}}{L^{0.7}} = \frac{C}{L}$$

यह रेखिकीय समरूप उत्पादन, फलन का महत्वपूर्ण परिणाम है। दोनों साधनों की औसत उत्पत्ति का अनुपात साधनों की मात्राओं के अनुपात में आया है।

$$\text{(iii) श्रम की सीमान्त उत्पत्ति} = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0.7AL^{-0.3}C^{0.3} = 0.7A\left(\frac{C}{L}\right)^{0.3}$$

$$\text{पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति} = \frac{\partial Q}{\partial C} = 0.3AL^{0.7}C^{-0.7} = 0.3A\left(\frac{L}{C}\right)^{0.7}$$

$$\text{अतः } \frac{\text{श्रम की सीमान्त उत्पत्ति}}{\text{पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति}} = \frac{A\left(\frac{C}{L}\right)^{0.3}}{A\left(\frac{L}{C}\right)^{0.7}} = \frac{C^{0.3}}{0.3} \cdot \frac{0.7}{L^{0.7}} = \frac{C}{L} = \frac{7}{3}\left(\frac{C}{L}\right)$$

इस प्रकार श्रम व पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति का अनुपात भी दोनों साधनों की मात्राओं के अनुपात से ही सम्बन्ध रखता है।

$$\text{(iv) कुल उत्पत्ति में श्रम का हिस्सा} = L \times \frac{\partial Q}{\partial L}$$

$= L \times 0.7\, A\, L^{-0.3}\, C^{0.3}$

$= 0.7\, A\, L^{0.7}\, C^{0.3}$

$= 0.7\, Q \; (\because Q = AL^{0.7}\, C^{0.3})$

इसी प्रकार कुल उत्पत्ति में पूँजी का हिस्सा

$$C \times \frac{\partial Q}{\partial C} = C \times 0.3AL^{0.7}C^{-0.7} = 0.3AL^{0.7}C^{0.3}$$

$= 0.3$

$\therefore$ कुल उत्पत्ति में श्रम का अंश + पूँजी का अंश $= 0.7Q + 0.3Q$

$= Q\,(0.7 + 0.3) = Q$

अतः समस्त उत्पत्ति का वितरण हो जाता है तथा कुछ भी आधिक्य का अभाव नहीं रहता।

यदि श्रम के लिए पूँजी के प्रतिस्थापन की दर (MRS) $= \frac{MPP_L}{MPP_K}$ हो तो उत्पादन-फलन $Q = L$ $K^{\frac{1}{5}}$ के दिये होने पर MRS निकालिए।

हल : **Solution**

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{5}L^{-\frac{2}{5}}K^{-\frac{1}{5}}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{5}L^{-\frac{3}{5}}K^{-\frac{4}{5}}$$

$$\therefore MRS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\frac{3}{5}L^{-\frac{2}{5}}K^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}L^{\frac{3}{5}}K^{-\frac{4}{5}}} = -3.\frac{K^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}}{L^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}} = -3\frac{K}{L}.$$

6.11 सारांश (Summary)

यदि $Z = f(x, y)$ हो तो यह दो चरों का फलन कहा जाएगा, जहाँ x और y एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से परिवर्तन सम्भव अवकलन x के सन्दर्भ में किया जाय तथा यही किया x को स्थिर रखकर दोहराई जाय तो आंशिक अवकलन प्राप्त होता है। दो से अधिक चर होने पर प्रत्येक चर का आंशिक अवकलज निकाला जा सकता है। इस प्रकार आंशिक अवकलन में फलन का जिस चर के सन्दर्भ में अवकलज ज्ञात किया जाता है उसके अतिरिक्त अन्य सभी चरों को स्थिर माना जाता है। इस प्रकार वास्तव परिवर्तनशील माना जाता है। इस प्रकार वास्तव में हम एक चर के अवकलन की विधियों का ही प्रयोग करते हैं। प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज की ही भांति द्वितीय व अन्य उच्च क्रम के अवकलज निकाले जा सकते हैं। किसी फलन के आंशिक अवकलनों का योग ही कुल अवकलन कहा जाता है। इसी प्रकार कुल अवकलन में dt का भाग देकर कुल अवकलज भी ज्ञात किया जाता है।

इस के साथ इस इकाई में आपने

- मांग विश्लेषण में आंशिक अवकलनों के प्रयोग के बारे में अध्ययन किया एवं यह जानकारी प्राप्त की कि सीमान्त मांग फलन कैसे ज्ञात करेंगे। इसके साथ ही दो वस्तुएं परस्पर पूरक हैं अथवा प्रतियोगी इसे पहचानने के लिए आवश्यक शर्तों का अध्ययन किया।
- मांग की आंशिक लोच ज्ञात करने के बारे में अध्ययन किया।
- उत्पादन विश्लेषण में एक साधन की सीमान्त उत्पादक ज्ञात की।

- समरूप उत्पादन फलन का अर्थ एवं इसके सम्बन्ध में आवश्यक स्पष्टीकरण का अध्ययन किया।
- ओयलर प्रमेय का अध्ययन किया।

6.12 शब्दावली (Key words)

आंशिक अवकलन	Partial Differentiation
आंशिक अवकलज	Partial Derivative
कुल अवकलन	Total Differentiation
कुल अवकलज	Total Derivative
सीमान्त मांग फलन	Marginal Demand function
प्रतियोगी	Competitive
पूरक	Complementary
समरूप फलन	Homogeneous function

6.13 प्रश्नों के उत्तर

1. दोनों वस्तुएं परस्पर प्रतियोगी हैं; क्योंकि

2. दोनों वस्तुएं परस्पर पूरक हैं; क्योंकि

दोनों शर्तें इन वस्तुओं को परस्पर पूरक बनाती है। यहाँ h_2 के बढ़ने से x_1 की मांग घटती है तथा h_1 के बढ़ने से x_2 की मांग घटती है जो दोनों वस्तुओं की पूरकता की सूचक है।

3. माँग की आय-लोच = 0.5

4. $\frac{\partial Q}{\partial L} = 5K - 4L$; तथा $\frac{\partial Q}{\partial K} = 5L - 4K$; प्रथम श्रम की सीमान्त उत्पत्ति एवं द्वितीय पूँजी की सीमान्त उत्पत्ति है।

5. कुल भुगतान $= \frac{4}{3}Q$ होगा, जो सम्भव नहीं हो पायेगा, चूँकि यह कुल उत्पत्ति से अधिक है।

6. (i) (अ) समरूप नहीं है।

(ब) समरूपता की डिग्री शून्य है।

7. फलन डिग्री 3 का समरूप है।

ओयलर की थ्योरम के अनुसार

$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y} = 3f(x, y) = 3z$ सिद्ध हो जाता है।

6.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Alpha C. Chiang - Fundamental Methods of Mathametical Economics, 3rd ed 1984.

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका—अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग चतुर्थ संस्करण 1989.

इकाई 7
अवकलज के आर्थिक प्रयोग
(Economic Applications and Derivatives)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

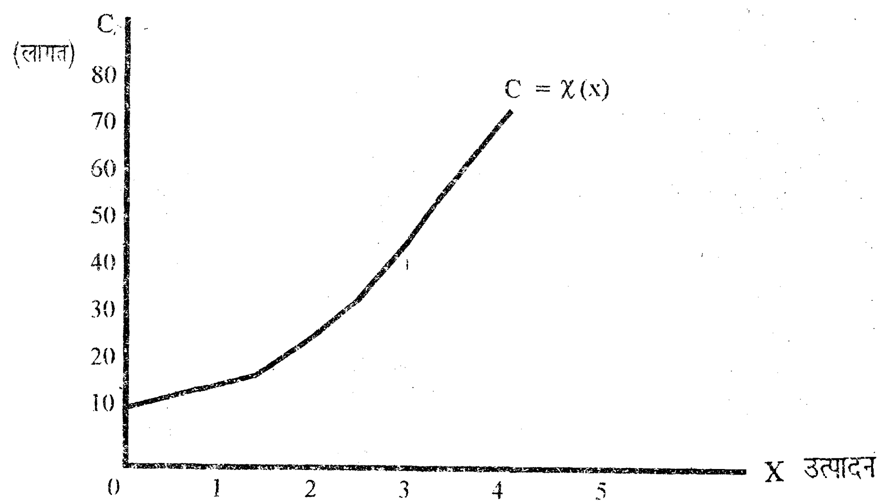
- सीमान्त फलन द औसत फलन को ज्ञात कर सकेगें।
- अकलन का चिन्ह व फलन की प्रकृति ज्ञात कर सकेंगे।
- रेखाओं की प्रकृति जान सकेंगे।
- करारोपण के आर्थिक प्रभाव का अध्ययन कर सकेगें व उत्पादन साम्य ज्ञात करेगें।

7.1 प्रस्तावना

अवकलन के सिद्धान्त के अनेक आर्थिक प्रयोग है इसका कारण यह है कि आर्थिक घटनायें दो चरों के मध्य सम्बन्धों को बतलाती है। उदाहरण के लिये कुल लागत में परिवर्तन की दर का आकलन करने पर सीमांत लागत प्राप्त होती है। इसी तरह कुल आगम में परिवर्तन की दर सीमांत आगम है।

माना कि लागत फलन $C = 3x^2 + 4x + 7$ है। इस फलन में 7 स्थिर लागत तथा शेष $3x^2 + 4x$ परिवर्तनशील लागत है। सीमांत लागत उत्पादन की एक इकाई बढ़ाने पर लागत में परिवर्तन होगी। उपरोक्त फलन में यदि लागत c तथा उत्पादन x है तो निम्नलिखित मूल्य प्राप्त होंगे।

x : 0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
c: 7	14	19.75	27	35.75	46	57.75	71



चित्र 7.1.

रेखाचित्र से स्पष्ट है यदि उत्पादन शून्य है तो स्थिर लागत 7 होगी। उत्पादन बढ़ने के साथ स्थिर लागत में तो परिवर्तन नहीं होगा पर परिवर्तनशील लागत बढेगी अतः कुल लागत बढ़ती जायेगी।

कुल लागत व उत्पादन में सम्बन्ध औसत लागत, सीमान्त लागत दोनों ही बतलाते है। अवकलन की क्रिया का सम्बन्ध सीमान्त लागत से है।

7.2 कतिपय सूत्र

अर्थशास्त्र के विद्यार्थियों के लिये यह आवश्यक है कि वे गणित के सूत्रों का अर्थशास्त्र में व्यवहारिक प्रयोग कर सकें। अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग के लिये निम्नलिखित सूत्र उपयोगी है।

(i) औसत लागत (AC) Average Cost $= \frac{TC}{X}$ या $\frac{C}{X}$

(ii)सीमांत लागत (MC) Margnial Cost $= \frac{dTC}{dX}$

(iii) औसत आगम (AR) Average Revenue $= \frac{TR}{X} = AR$

(iv) सीमांत आगम (MR) Margnial Revenue $= \frac{dTR}{dX}$

(v) लाभ (p) Profit = TR – TC

(vi) सीमांत उपयोगिता (Marginal Revenue) $= \frac{du}{dx}$

यहां: u = उपयोगिता है।

in all the above cases, C is cost, x is output (production), TC is Total Cost, TR = Total Revenue,

7.3 सीमांत एवं औसत का ज्ञान

सीमांत एवं औसत का ज्ञान अर्थशास्त्र में विश्लेषण के लिये उपयोगी विधि है। अवकलन क्रिया की सहायता से इन प्रश्नों को आसानी से हल किया जाता है।

उदाहरण : किसी फर्म का लागत फलन

$C = 3x^2 - 6x + 10$ है। फर्म की सीमांत एवं औसत लागत ज्ञात कीजिये।

(MC) सीमांत लागत $= \frac{dc}{dx} = 6x - 6$

(AC) औसत लागत $= \frac{c}{x} = \frac{3x^2 - 6x + 10}{x}$

$$= 3x - 6 + \frac{10}{x}$$

उदाहरण :

कुल आगम फलन $TR = 90x - 5x^2$ है यदि उत्पादन का स्तर 5 है तो सीमांत आगम व औसत आगम ज्ञात कीजिये।

$TR = 90x - 5x^2$

(MR) सीमांत आगम $= \frac{d(TR)}{dx} = 90 - 10x$

जब x = 5 है तो सीमांत आगम = 90 - 10 (5) = 40

(AR) औसत आगम $= \frac{TR}{X} = \frac{90x - 5 \times 2}{X} = 90 - 5x$

x = 5 है तो औसत आगम 90 - 5x = 90 - 25 = 65

Exercise No.1

यदि $TC = 5x^3 - 10x^2 + 6x + 10$

$TR = 30x - 10x^2$ है तो सीमान्त लागत, औसत लागत, सीमान्त आगम औसत आगम व लाभ ज्ञात कीजिये।

Exercise No. 2

यदि $P = (10 - 2x)^2$ तथा $C = 60 + 7x$ है तो सीमान्त लागत, औसत लागत सीमांत आगम औसत आगम व लाभ ज्ञात कीजिये।

7.4 अवकलन का चिन्ह एवं फलन की प्रकृति

(Sign of Derivative and Nature of the Function)

अर्थशास्त्र में प्रयोग की दृष्टि से रेखाओं की प्रकृति के बारे में जानकारी महत्वपूर्ण है। उदाहरण के लिये औसत लागत रेखा प्रारंभ में गिरती है फिर न्यूनतम बिंदु पर पहुंचकर पुनः बढ़ती है। कुल लागत रेखा बढ़ती रहती है। हमारा उद्देश्य अवकलन क्रिया के द्वारा फलन अथवा रेखाओं की प्रकृति को समझना है।

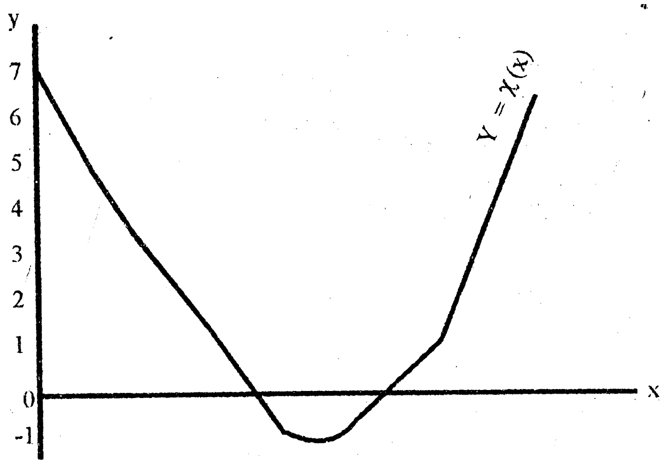
उदाहरण :

निम्नलिखित फलन का ग्राफ बनाइये।

$$y = 2x^2 - 8x + 7$$

x के विभिन्न मान प्रतिस्थापित करने पर

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4
y	7	$5\frac{1}{8}$	$3\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	1	7



चित्र 7.2

अवकलन क्रिया की सहायता से हम दो प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर सकते हैं।

(i) रेखा किसी निश्चित मान (x का मान) से पहले घट रही है अथवा बढ़ रही है।

(ii)किसी निश्चित मान पर रेखा अपने उच्चतम बिंदु, निम्नतम बिंदु अथवा झुकाव बिंदु पर है।

चूँकि प्रत्येक फलन का ग्राफ बनाना व उसके द्वारा रेखा की प्रकृति तथा उच्चतम (Maximum) निम्नतम (Minimum) व झुकाव बिन्दु (Point of Inflexion) को जानना कठिन है अतः हम अवकलन क्रिया इन प्रश्नों के उत्तर निकालेंगे। सुविधा के लिये हम उसी फलन को लेंगे जिसका रेखाचित्र बनाया गया है।

उदाहरण : $Y = 2x^2 - 8x + 7$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 8$$

या $x = 2$

स्पष्टतः $x = 2$ वह बिंदु है जिसे पहले वाले मूल्यों $x < 2$ पर रेखा की प्रकृति दूसरी होगी एवं $(x > 2)$ पर रेखा की प्रकृति भिन्न प्रकार की होगी।

यह जानने के लिये हम फलन का द्वितीय अवकलन करेगें।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4$$

यह घनात्मक है। तथा रेखाचित्र से स्पष्ट है कि बिंदु $x = 2$ पर y का मूल्य निम्नतम है।

7.5 रेखाओं की प्रकृति (Nature of the Curve)

रेखाओं की प्रकृति की जानकारी के लिये हम उनके प्रथम व द्वितीय अवकलन को प्राप्त करेगें।

प्रथम अवकलन की तीन स्थितियाँ हो सकती है।

(i) x के जिन मूल्यों के लिये $\frac{dy}{dx} > 0$ है तो रेखा बायें से दायें ऊपर की जाती है।

(ii) x के जिन मूल्यों पर $\frac{dy}{dx} < 0$ है वहाँ रेखा बायें से दायीं ओर घटती जाती है।

(iii) यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ है तो तीन परिस्थितियाँ हो सकती हैं।

(A) रेखा अपने उच्चतम बिंदु पर (Maximum) हो सकती है।

(B) रेखा अपने निम्नतम बिंदु (Minimum) पर हो। इस अवस्था में $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ होगा।

(C) रेखा झुकाव बिन्दु या विभक्ति बिंदु पर हो। (Point of Inflexion) तब $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ होगा।

Summary

	Condition	Maximum	Minimum	Inflexion
First order	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
Second order	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

उदाहरण : $y = x^3 - 8x^2 + 20x + 6$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 16x + 20 = 0 \qquad \text{......(i)}$$

प्रथम अवकलन को शून्य के बराबर मानने पर

On solving (I) we get the values of x.

$$3x^2 - 16x + 20 = 0$$

$$3x^2 - 10x - 6x + 20 = 0$$

$$3x(x - \frac{10}{3}) - 6(x - \frac{10}{3}) = 0$$

$$(3x - 6)(x - \frac{10}{3}) = 0$$

$$\therefore\ x = 2,\quad x = \frac{10}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 16 \qquad \text{.....(ii)}$$

जब $x = 2$ है तो $\frac{dy^2}{dx^2} = 6(2) - 16 = -4$

जब $x = \frac{10}{3}$ है तो $\frac{du^2}{dx^2} = 6\left(\frac{10}{3}\right) - 16 = +4$

इस प्रकार स्पष्ट है $x = 2$ के मूल्य पर फलन का मान उच्चतम होगा।

उदाहरण :

माना कि किसी फर्म का लाभ फलन $\pi = -3x^2 + 16x + 8$ है तो अधिकतम लाभ का उत्पादन बिंदु ज्ञात कीजिये।

$$\frac{d\pi}{dx} = -6x + 16 = 0 \qquad \text{....(i)}$$

इसे शून्य के बराबर मानने पर

Solving I, we get

$-6x + 16 = 0$

$-6x = -16$

$x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \qquad \text{.....(ii)}$$

अर्थात् जब $x = \frac{8}{3}$ है तो फर्म अधिकतम लाभ को प्राप्त कर रही है। यदि हम लाभ की मात्रा ज्ञात करना चाहें तो $x = \frac{8}{3}$ का लाभ फलन में प्रतिस्थापन करने पर

$\pi = -3x2 + 16x + 8$

$\pi = -3\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 16\left(\frac{8}{3}\right) + 8$

$\pi = \frac{-64}{3} + \frac{128}{3} + 8 = \frac{88}{3}$

$= \frac{88}{3}$ लाभ की मात्रा होगी।

उदाहरण : यदि लागत फलन $Ac = 3x^2 - 8x + 10$ हो तो न्यूनतम लागत बिन्दु ज्ञात कीजिये।

$AC = 3x^2 - 8x + 10$

$$\frac{dc}{dx} = 6x - 8 = 0 \qquad \text{....(i)}$$

या $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 6 \qquad .....(ii)$$

यह घनात्मक है अतः $x = \frac{4}{3}$ पर औसत लागत न्यूनतम होगी। उत्पादन के इस बिंदु पर औसत लागत

$$AC = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) + 10$$

$$= 3 \times \frac{16}{9} - 8 \times \frac{4}{3} + 10$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{32}{3} + 10 = \frac{16 - 32 + 30}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$ होगी।

उदाहरण :

यदि फर्म का लागत फलन $c = 2x^3 - 12x^2 + 20x + 12$ है तथा आय फलन $p = 20 - 3x$ है तो अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिये।

यहाँ $P = 20\text{-}3x$ है अतः $TR = (P)(x)$ अर्थात $(20\text{-}3x)(x) = 20x\text{-}3x^2$ है।

$c = 2x^3 - 12x^2 + 20x + 12$

$p = TR - TC$

$= (20x - 3x^2) - (2x^3 - 12x^2 + 20x + 12)$

$= 20x - 3x^2 - 2x^3 + 12x^2 - 20x - 12$

$p = -2x^3 + 9x^2 - 12$

$\pi = -2x^3 + 9x^2 - 12$

$$\frac{d\pi}{dx} = -6x^2 + 18x \qquad \text{[प्रथम अवकलन]}$$

प्रथम अवकलन का मान शून्य करने पर

$-6x^2 + 18x = 0$

$-6x^2 = -18x$

$x^2 = 3x$

$x = 3$

अधिकतम लाभ की दशा यह है कि द्वितीय अवकलन का मान ऋणात्मक होना चाहिये।

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -12x + 18 \qquad \text{[द्वितीय अवकलन]}$$

$(x = 3)$ का मान रखने का

$-36 + 18 = -18.$

अतः दिये हुए फलन में यह अधिकतम लाभ है।

Exercise No. 3

यदि $P = 12 - 4x$ (कीमत)

तथा $Ac = -x +$ (औसत लागत) है तो इष्टतम उत्पादन व लाभ ज्ञात कीजिये

....

....

....

....

....

Exercise No. 4

इष्टतम उत्पादन व लाभ ज्ञात कीजिये।

$P = 15 - 2x$ (कीमत)

$C = x^3 - 2x$ (कुल लागत)

7.6 करारोपण व उत्पादन निर्धारण (Taxation and Determination of output)

करारोपण आर्थिक क्षेत्र का एक महत्वपूर्ण भाग है। इसका प्रभाव उत्पादन व बिक्री पर पड़ता है। करारोपण का महत्व न केवल राजस्व प्राप्ति में है बल्कि फर्म के साम्य पर भी पड़ता है। करारोपण तीन प्रकार से किया जा सकता है।

(अ) एक निश्चित धन राशि का कर लगाकर चाहे उत्पादन की मात्रा कितनी भी क्यों न हो। इसे थोक कर (Lump Sum Tax) कहते हैं।

(ब) वस्तुओं पर प्रति इकाई कर लगाया जाए जैसे 5 रुपया प्रति वस्तु, प्रति मीटर आदि। यह विशिष्ट कर (Specific tax) कहलाता है।

(स) वस्तुओं पर उनके मूल्य के अनुसार कर लगाया जाय जैसे मूल्य का 10 प्रतिशत। इसे मूल्यानुसार कर (Ad Valorum Tax) कहते हैं।

7.6.1 थोक कर (Lump Sum Tax)

माना कि सरकार किसी फर्म पर एक निश्चित कर राशि कर के रूप में लगाती है, जिसका उत्पादन में कमी या वृद्धि में कोई सम्बन्ध नहीं है तब थोक कर कुल लागत में जुड़ जायेगा। पर इसका असर सीमांत लागत पर नहीं होगा।

उदाहरण के लिये

$$c = 3x^2 0 - 10x + 60 + 100 \text{ (tax)}$$

$$\frac{dc}{dx} = MC = 6x - 10 + 0 + 0$$

इस प्रकार थोक कर स्थित लागत की तरह होता है जिसका मूल्यों पर ऊपर नहीं होता है। पर यह कुल लाभ को कम करता है।

7.6.2 प्रति इकाई कर (Specific Tax)

लगाने पर इसमें प्रति इकाई (संख्या, भार, माप आदि) के आधार पर कर लगाया जाता है। इसे मात्रानुसार कर भी कहते हैं। इसमें वस्तुओं की लागत में एक निश्चित राशि के बराबर वृद्धि होती है। उदाहरण के लिये यदि कर प्रति इकाई t है तो कुल लागत में tx वृद्धि हो जाएगी। परिणाम स्वरूप औसत व सीमांत लागत दोनों में t प्रति इकाई वृद्धि होगी।

उदाहरण : माना कि $P = 15 - 3x$ व $c = 2x^2 - 5x$ है तथा प्रति इकाई कर 2 है।

कर लगाने में पूर्व का संतुलन :

$P = 15 - 3x$

$TR = 15x - 3x^2$

$TC = 2x^2 - 5x$

$\pi = TR - TC = 15x - 3x^2 - 2x^2 + 5x$

$\pi = -5x^2 + 20x$

$$\frac{d\pi}{dx} = -10 + 20 = 0$$

या $x = 2$

कर पूर्व मूल्य $P = 15 - 3(2) = 9$

कर पूर्व लाभ $p = -5(2)^2 + 20(2)$

$= -20 + 40 - 20$

यदि प्रति इकाई 2 रुपया कर लगाया जाय तो

$TC = 2x^2 - 5X + 2x$

$\pi = 15x - 3x^2 - 2x^2 + 5x - 2x$

$\pi = -5x^2 + 18x$

$$\frac{d\pi}{dx} = -10x + 18 = 0$$

या $x = 1.8$

कर पश्चात कीमत $= P = 15 - 3(1.8) - 9.6$

कर पश्चात लाभ $= \pi - 5\,(1.87)^2 + 18\,(1.8)$

$\pi = -16.2 + 32.4 = 16.4$

इस प्रकार कर के परिणाम स्वरूप कीमत बढ़ेगी, लाभ की मात्रा कम होगी तथा उत्पादन की मात्रा भी पहले की अपेक्षा कम होगी।

7.6.3 मूल्यानुसार कर (Ad valorum Tax)

लगाने पर इसमें मूल्य का निश्चित प्राप्ति करके रूप में लगाया जाता है जैसे बिक्री कर या उत्पादन कर। जितने प्रतिशत कर लगाया जाता है उतनी ही लागत बढ़ जाती है।

उदाहरण : $P = 80 - 4x$

$C = 2x^2 - 8x + 20$

ऐसी अवस्था में संतुलन के स्तर पर उत्पादन, लाभ व कीमत की मात्रा निम्नप्रकार से होगी

$P = 80 - 4x$

$TR = Px = 80x - 4x2$

$C = 2x^2 - 8x + 20$

$\pi = 80x - 4x^2 - 2x^2 + 8x - 20$

$\pi = - 6x^2 + 88x - 20$

$$\frac{d\pi}{dx} = -12x + 88 = 0$$

या $x = 7.5$ (इष्टतम उत्पादन)

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -12$$

जो अधिकतम लाभ को दर्शाता है।

$P = 80 - 4\ (7.5) = 50$

$\pi = - 6(7.5)^2 + 88(7.5) - 20$

$\pi = 302.5$

माना कि 10 प्रतिशत मूल्यानुसार कर लगता है।

$TR = p.x = 80x - 4x^2$

$C = 2x^2 - 8x + 20 + .10\ (px)$

$C = 2x^2 - 8x + 20 + .10\ (80x - 4x^2)$

C अर्थात 10 प्रतिशत कर लगने से कुछ लागत 10 प्रतिशत बढ़ जायेगी)

$p = TR - TC = 80x - 4x^2 - 2x^2 + 8x - 20 - .10\ (80x - 4x^2)$

$p = 80x - 4x^2 - 2x^2 + 8x - 20 - 8x + .4\ x^2$

$p = - 5.6x^2 + 80x - 20$

$$\frac{d\pi}{dx} = -11.2x + 80 = 0$$

$x = 7.14$ (उत्पादन)

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -11.2$$

$P = 80\ 4\ (7.14)$

$P = 51.44$

$\pi = -5.6\ (7.14)^2 + 80(7.14) - 20$

$\pi = - 285.48 + 571.2 - 20$

$\pi = 265.72$

कर लगने के पश्चात लाभ व उत्पादन कम हुआ है तथा कीमत बढ़ी है।

Exercise No. 5

निम्नलिखित लागत व मूल्य फलनों के आधार पर इष्टतम उत्पादन, कीमत व लाभ ज्ञात कीजिये।

(a) यदि उत्पादन पर प्रति इकाई 4 रुपया कर लगता है।

(n) यदि उत्पादन पर मूल्यानुसार 10 प्रतिशत कर लगता है।

(i) $P = 75 - 3x$

$TC = 100 + 3x$

(ii) $x = 40 - 2P$

$C = 80 + 3x$

(iii) $P = 80 - x^2 + 3x$

$C = 15 + 10x^2 + 7x^3$

(iv) $P = 14 - x^2$

$C = x^3 - 2x$

(v) $P = 12 - 3x^2$

$C = 14 - 3x$

(vi) $P = x^2 - 6x + 9$

$C = x^3 + 3x + 7$

(vii) $P = 24 - 8x$

$C = - 2x^2 + 14x$

(viii) $P = 150 - 6x$

$TC = 200 + 6x$

....

....

....

....

7.7 सारांश : (Summary)

अर्थशास्त्र में अवकलन के प्रयोग कई क्षेत्रों में हो सकते हैं, जैसे सीमान्त लागत, सीमान्त आगम व लाभ तथा उत्पादन की मात्रा ज्ञात करना।

1. $y = TC$ कुल लागत

$\frac{dy}{dx} = MC$ (सीमांत लागत)

2. $Y = TR$ (कुल आगम)

$\frac{dy}{dx} = MR$ (सीमांत आगम)

अवकलन के आर्थिक प्रयोग से हम किसी फलन का उच्चतम, निम्नतम या झुकाव बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं।

(i) x के जिन मूल्यों पर $\frac{dy}{dx} < 0$ है वहां रेखा बायें से दायीं ओर घटती जाती है।

(ii) x के जिन मूल्यों पर $\frac{dy}{dx} > 0$ है तो रेखा बायें से दायी और ऊपर की ओर जाती है।

(iii) यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ है तो;

(A) रेखा अपने उच्चतम बिंदु पर है यदि $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(B) रेखा अपने निम्नतम बिंदु पर है यदि $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

(C) रेखा झुकाव बिंदु पर है यदि $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ करारोपण के क्षेत्र में भी अवकलन का प्रयोग है।

(A) यदि थोक कर लगाया जाता है कर की राशि लाभ में से घटा दी जाती है।

(B) यदि प्रति इकाई कर लगे तो कुल लागत में से प्रति इकाई कर वस्तु की मात्रा का गुणा (tx) योग हो जायेगा।

(C) यदि मूल्यानुसार (प्रतिशत) कर लगे तो लाभ में (TR) की मात्रा घटा दी जायेगी।

7.8 हल व उत्तर Answers to Exercises

Exercise No. 1

$MC = 15x^2 - 20x + 6$

$AC = 5x^2 - 10x + 6 + \frac{10}{X}$

$MR = 30 - 20x$

$AR = 30 - 10x$

$\pi = -5x^3 + 24x - 10$

Exercise No. 2

$MC = 7$

$AC = \frac{60}{x} + 7$

$MR = 12x^2 - 80 + 100$

$AR = 4x^2 - 40x + 100$

$\pi = 4x^3 - 40x^2 + 93x - 60$

Exercise No. 3

$$x \text{ (उत्पादन)} = \frac{5}{6}$$

$$\text{लाभ} = \frac{25}{12}$$

Exercise No. 4

$$\text{उत्पादन} = \frac{13}{6}$$

$$\text{लाभ} = 14\frac{1}{12}$$

Exercise No. 5

		इष्टतम उत्पादन (x)	कीमत (π)	लाभ (π)
(i)	(a)	$\frac{34}{3}$	41	285.4
	(b)	11.9	39.2	282.25
(ii)	(a)	13	13.5	4.5
	(b)	16.67	11.67	45
(iii)	(a)	1.5	82.25	56.25
	(b)	1.55	82.24	62.39
(iv)	(a)	1.41	12	11.32
	(b)	1.6	11.44	15.68
(v)	(a)	1.1	8.34	-5.89
	(b)	1.3	6.93	-1.99
(vi)	(a)	$\frac{1}{6}$	8.02	-6.83
	(b)	0.46	6.42	-5.78
(vii)	(a)	$\frac{1}{2}$	20	1.5
	(b)	.73	18.16	2.27
(viii)	(a)	11.67	80	616.7
	(b)	9.77	91.36	429.8

7.9 शब्दावली

आगम	Revenue
उच्चतम	Maximum
थोककर	Lump sum tax
निम्नतम	Minimum
मूल्यानुसार कर	Ad Valorum tax
लागत	Cost
विशिष्ट या मात्रानुसार कर	Specific tax
विभक्ति बिंदु या झुकाव बिन्दु	Point of Inflexion

7.10 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Alpha C. Chiang : Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3rd Edition, 1984

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका - अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग, चतुर्थ संस्करण 1989.

MAEC-03-(N)

परिमाणात्मक विधियाँ

खण्ड - 2

इस खण्ड में कुल 7 इकाइयां रखी गई हैं। इकाई 8 को पढ़ने के बाद आप उन विधियों को जान सकेंगें जिनसे एक फलन के परम मूल्य ज्ञात किये जाते हैं इसके बाद अनुकूलतम समीकरण की धारणा, प्रतिबंध रहित व प्रतिबन्धित समीकरण की धारणा, प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण की समस्याओं में क्रान्तिक मूल्य ज्ञात करने की पद्धतियां।

इकाई 9 को पढ़ने के बाद आप जान सकेंगे कि अनुकूलतम समीकरण की धारणा का अर्थशास्त्र में महत्त्व क्या है एवं अनुकूलतम समीकरण की विधियों का सरल आर्थिक समस्याओं को हल करने में प्रयोग की रीतियां।

इकाई 10 में अर्थशास्त्र के क्षेत्र में समाकलन की उपयोगिता भली भांति समझाई गई है। इसमें स्पष्ट किया गया है कि सीमांत फलन ज्ञात होने पर किस प्रकार कुल फलन ज्ञात किया जा सकता है। नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य निकाल सकेंगे, एवं उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत को माप सकेंगे।

इकाई 11 को पढ़ने के बाद आप मैट्रिक्सों की पहचान कर सकेंगे: मैंट्रिक्सों का योग तथा गुणा कर सकेंगे; मैट्रिक्स का प्रतिलोम ज्ञात कर सकेंगे; मैंट्रिक्स बीजगणित की प्रविधि द्वारा रैखिक समीकरण निकायों को हल कर सकेंगे, मैट्रिक्सों का पृयक्करण कर जोड़ना, घटाना एवं गुणा आदि संक्रियायें कर सकेंगे।

इकाई 12 के अन्तर्गत सारणिक की संकल्पना, सारणिक एवं मैट्रिक्स का अन्तर, सारणिक के मुख्य गुण धर्म, सारणिक का मूल्यांकन सारणिक का प्रयोग करके रैखिक समीकरण निकायों का अनन्य हल ज्ञात कर सकेंगे।

इकाई 13 को पढ़ने के बाद आप आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रकृति को समझ जावेंगे। तकनीकी गुणांकों का परिकलन कर सकेंगे और उन्हें आव्यूह के रूप में प्रस्तुत कर सकेंगे। आव्यूह बीजगणित की सहायता से आगत निर्गत प्रणाली का हल ज्ञात करने की विधि जान पावेंगे। अर्थशास्त्र के खुले प्रतिरूप की धारणा को समझ जावेंगे और प्रतिरूप को युगपत समीकरणों के समुच्चय के रूप में प्रस्तुत कर आव्यूह बीजगणित की सहायता से वांछित उत्पादन स्तर एवं आगत मात्रा निर्धारित करती है।

इकाई 14 का मुख्य उद्देश्य रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या से अवगत कराना, रैखिक प्रोग्रामिंग के कुछ उदाहरण प्रस्तुत करना; रैखिक प्रोग्रामिंग की मुख्य विशेषताओं को बताना एवं रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्याओं को रेखाचित्र की सहायता से हल करना।

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

MAEC-03-(N)

परिमाणात्मक विधियाँ

खण्ड - 2

इकाई संख्या	पृष्ठ संख्या

पाठ्यक्रम विकास समिति

प्रोफेसर बी.एस. शर्मा (अध्यक्ष)
कुलपति,
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

प्रोफेसर एस.एस. आचार्य
निदेशक, विकास अध्ययन संस्थान (आई.डी.एस.)
जयपुर

डॉ. श्याम नाथ,
फेलो, एन.आई.पी.एफ.पी.
नई दिल्ली

डॉ. प्रमोद वर्मा
प्रोफेसर, इन्डियन इस्टीट्यूट ऑफ मैनेजमेन्ट
अहमदाबाद

डॉ. अमिताभ कुन्डू
निदेशक, गुजरात इन्स्टीट्यूट ऑफ डवलपमेन्ट रिसर्च
गोटा, अहमदाबाद

प्रोफेसर ए.के. सिंह
गिरि इन्स्टीट्यूट ऑफ डवलपमेन्ट स्टडीज
लखनऊ

निदेशक
दिल्ली स्कूल ऑफ इकोनोमिक्स
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रोफेसर डी.डी. नरूला
मानद वरिष्ठ अध्येता
विकास अध्ययन संस्थान, जयपुर

***डॉ. एम.के. घडोलिया**
सह आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग,
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

श्री आर.पी. शर्मा
सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

डॉ. जे.के. शर्मा
सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

डॉ. एल.एन. गुप्त, संयोजक
आचार्य एवं अध्यक्ष अर्थशास्त्र विभाग
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा

*डॉ. एम.के. घडोलिया, (तत्कालीन अध्यक्ष) सह आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग ने 16.8.1996 तक इस पाठ्यक्रम का संयोजन किया।

पाठों के लेखक

डा. सी०एस० बरला
आचार्य एवं अध्यक्ष,
अर्थशास्त्र विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राजस्थान)

डा. एम.के. घड़ोलिया
सह-आचार्य, अर्थशास्त्र
कोटा खुला विश्वविद्यालय,
कोटा (राजस्थान)

डा. वी.सी. सिन्हा
आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
अवधेश प्रतापसिंह विश्वविद्यालय,
रीवा (म.प्र.)

डा. के.आर.जी. नायर
आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
(दक्षिण परिसर) दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

सम्पादक

डा. जे.एम. जोशी
भूतपूर्व आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर, (राजस्थान)

भाषा सम्पादक

डा. एम.के. घड़ोलिया
सह-आचार्य अर्थशास्त्र
कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

डा. जे.के. शर्मा
सहायक-आचार्य
अर्थशास्त्र, कोटा खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

अनुवाद

डा. एस.के. अग्रवाल
वरिष्ठ सहायक-आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग
राजधानी कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

डा. (श्रीमती) एस. मूर्ति
आचार्य एवं अध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग
विक्रम विश्वविद्यालय
उज्जैन (म.प्र.)

सामग्री उत्पादन

डॉ. ब्रजकिशोर शर्मा
निदेशक
पाठ्य सामग्री उत्पादन एवं वितरण
कोटा खुला विश्वविद्यालय
कोटा

इकाई 8

इकाई अनुकूलतमीकरण की धारणा : अप्रतिबन्धित एवं प्रतिबन्धित

इकाई की रूपरेखा

8.1 उद्देश्य

इकाई 4, 5, 6, एवं 7 में आप अवकलनों और उनके उपयोगों के बारे में पढ़ चुके हैं। इस इकाई में आप अप्रतिबन्धित एवं प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण के बारे में सीखेंगे। हम हमारा अध्ययन ह्रासमान एवं वर्द्धमान फलनों के विवेचन से प्रारम्भ करेंगे।

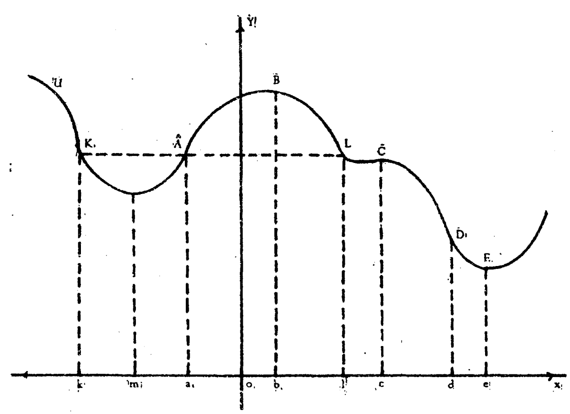
8.2 वर्द्धमान एवं ह्रासमान फलन

एक फलन $x = a$ बिन्दु पर वृद्धिगत फलन कहलावेगा यदि पर्याप्त थोड़े सामीप्य में, x के a से अधिक मूल्य के साथ x के फलन [f(x)] के मूल्य a के फलन [f(a)] के मूल्यों से अधिक हों और लघु मूल्य लघु मूल्यों के अनुरूप हो।

x का एक फलन [f(x)] $x = a$ बिन्दु पर ह्रासमान होगा यदि इस बिन्दु के पर्याप्त थोड़े सामीप्य में x के a से अधिक मूल्य x के फलन [f(x)] के मूल्यों के a के फलन [f(a)] के मूल्यों से कम होने के साथ अनुषंगी हों एवं लघु मूल्य उच्च मूल्यों के अनुषंगी हों।

उदाहरण 8.1

चित्र 8.1 में $x = a$ बिन्दु पर फलन वर्द्धमान है क्योंकि A के दांयी ओर वक्र के बिन्दु A के ऊपर स्थित है और बांयी ओर A से नीचे। वही फलन $x = d$ पर ह्रासमान है क्योंकि इसके पर्याप्त थोड़े समीप्य में D के दायीं ओर वक्र पर बिन्दु D के नीचे स्थित है और बांयी ओर D के ऊपर स्थित है। फलन $x = c$ पर भी ह्रासमान है। $x = b$, $x = e$ और $x = m$ बिन्दुओं पर फलन न तो ह्रासमान है और न ही वर्द्धमान ($x = b$ पर इसका उच्चिष्ठ है। और $x = e$ एवं $x = m$ पर निम्निष्ठ).



चित्र : 8.1

ह्रासमान एवं वर्द्धमान फलन की धारणा को आर्थिक शब्दावली की सहायता से भी स्पष्ट किया जा सकता है। माना कि x उत्पादन है और y औसत लागत है। हम यह भी मान लेते हैं कि x और y में सम्बन्ध $y = 60 - 6x + x^2$ (एक औसत लागत फलन) है। अब x के बढ़ने पर y घटती है, बढ़ती है या स्थिर रहती है? चित्र 8.2 लागत

फलन को दर्शाता है। यह बताता है कि जैसे ही उत्पादन (x) में वृद्धि होती है औसत लागत (y) में कमी होती है एवं औसत लागत (y) निम्निष्ठ पर पहुंच जाती है और फिर बढ़ना प्रारम्भ करती है। एक फलन। वक्र जो नीचे की ओर ढ़ाल वाला हो जैसा कि वक्र का AB भाग है (चित्र 8.2) ह्रासमान फलन कहलाता है। इस स्थिति में x में वृद्धि के साथ y फलन का मूल्य घटता है। वक्र का BC भाग वर्द्धमान फलन को बताता है क्योंकि इस भाग में x में वृद्धि के साथ y में भी वृद्धि होती है।

इस धारणा को और अधिक समझने के लिए फलन के प्रथम भाग को हम रेखाचित्र पर अंकित करते हैं जैसा कि चित्र 8.3 में बताया गया है। अब हम वक्र पर m बिन्दु को चुनते हैं और इस बिन्दु पर एक स्पर्श रेखा खींचते हैं। Tan β वक्र के ढ़ाल को बताता है। जैसा कि हम जानते हैं कि किसी फलन का m बिन्दु पर अवकल उस रेखा के उस बिन्दु पर ढ़ाल के बराबर होता है। अतएव

$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \qquad \text{जहां } \beta > 90^0$$

लेकिन त्रिकोणमिति से हम जानते हैं कि

$$\tan\beta = \tan(180^0 - \theta) = -\tan\theta$$

अतः यदि $\beta = 135^0$ हो तब $\theta = 45^0$

एवं $\tan 135^0 = \tan(180^0 - 45^0) = -\tan 45^0 = -1$

और इसलिए अवकलज होगा

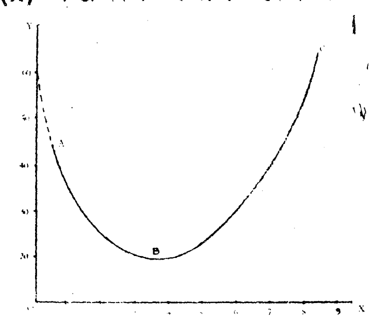
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta = \tan 135^0 = -1 < 0$$

सामान्य रूप में

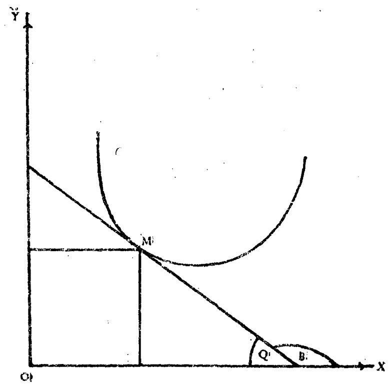
$$\text{जहाँ } \beta > 90^0; \quad \frac{dy}{dx} < 0$$

इसलिए, $y = f(x)$, x बिन्दु पर ह्रासमान फलन होगा जब कि फलन का प्रथम अवकलज शून्य से कम हो $[f^1(x) < 0]$;

और उस बिन्दु पर जहां प्रथम अवकलज शून्य से अधिक होगा $[f^1(x) > 0]$ $y = f(x)$ वर्द्धमान फलन होगा।



चित्र : 8.2



चित्र : 8.3

उदाहरण 8.2

माना कि दिया हुआ फलन $y = 60 - 6x + x^2$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = -6 + 2x \text{ है।}$$

यदि $x = 2$ है तो $\dfrac{dy}{dx} = -6 + 4 = -2 < 0$

यदि $x = 4$ है तो $\dfrac{dy}{dx} = -6 + 8 = 2 > 0$

इस प्रकार $x = 2$ पर फलन ह्रासमान है और $x = 4$ पर वर्द्धमान।

8.2.1 वक्रों की उत्तलता

हम एक जीप पर विचार कर जो एक गतिरोध की स्थिति से प्रस्थान करती है और कुछ समय में एक निश्चित गति प्राप्त करती है। माना कि इसने y (मीटर) दूरी t सैकेण्ड्स में तय की है, इसे निम्न प्रकार से सम्बन्धित किया जा सकता है।

$y = t^2$ (I)

$t = 1$ होने पर $y = 1$

$t = 4$ होने पर $y = 16$ एवं इसी प्रकार अन्य मूल्यों पर

(1) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dt} = 2t \quad (2)$$

$\dfrac{dy}{dt}$, t समयावधि में रफ्तार है। दूसरे शब्दों में

जब t = 4 है; $\frac{dy}{dt} = 2 \times 4 = 8$ मीटर प्रति सैकण्ड है, एवं

इसी प्रकार t के अन्य मूल्यों पर।

अब (2) का पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2 \tag{3}$$

यह रफ्तार में प्रति सैकण्ड परिवर्तन या गतिवृद्धि है।

$\frac{d^2y}{dt^2} = f''(t)$ परिवर्तन की दर है और यह स्थिर है।

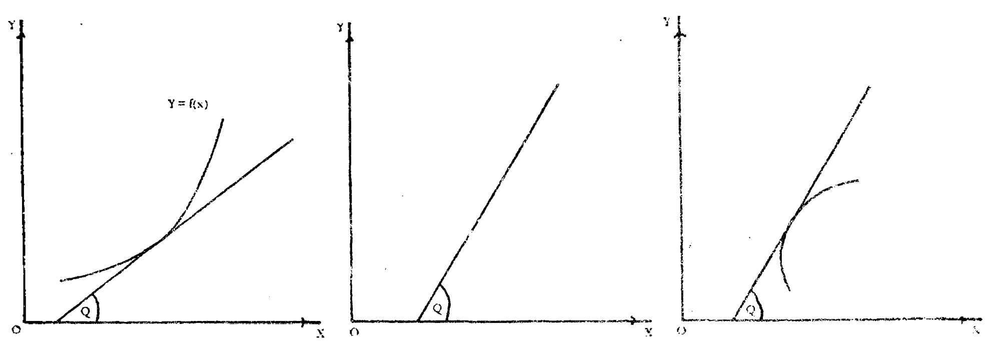
उपरोक्त शब्दावली का उपयोग करके हम वक्र की उत्तलता का स्पष्टीकरण करेंगें।

माना कि फलन

$y = f(x)$

में y में बढ़ती हुई दर से वृद्धि हो रही है, जबकि $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0$

इसका तात्पर्य यह हुआ कि वक्र $y = f(x)$ स्पर्श रेखा के ऊपर स्थित है और यह ऊपर की ओर नतोदर अथवा नीचे की ओर उन्नतोदर है (चित्र 8.4)



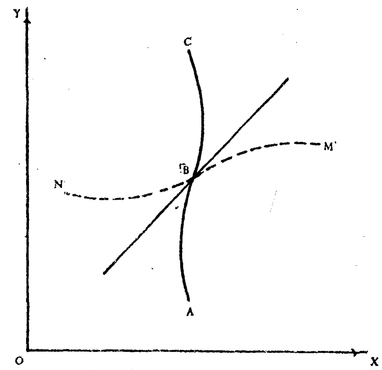
चित्र 8.4 (अ) **चित्र 8.4 (ब)** **चित्र 8.4 (स)**

चित्र 8.4 (ब) y में वृद्धि की शून्य दर को बताता है

अथवा $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0$ है वक्र में कहीं वक्रता नहीं हैं।

चित्र 8.4 (स) y में वृद्धि की दर का घटना दर्शाता है अथवा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f^{11}(x) < 0$$

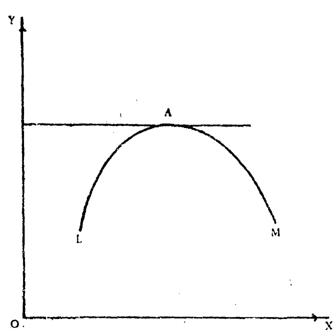


चित्र 8.5

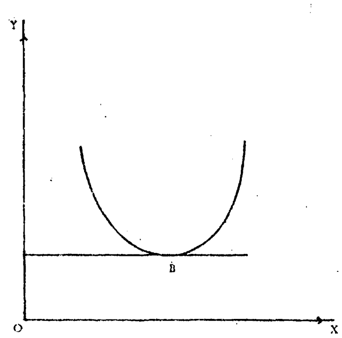
यदि वक्र चित्र 8.5 में बताये प्रकार की है तो हमें निम्न प्रकार की स्थिति प्राप्त होगी। वक्र पर A से B की ओर बढ़ने पर $f^{11} < 0$ क्योंकि AM ऊपर की ओर नतोदर है। B बिन्दु से C तक $f^{11} > 0$ क्योंकि NBC नीचे की ओर उन्नतोदर हैं। B बिन्दु पर, f^{11} का चिह्न बदलता है और इस बिन्दु पर $f^{11} = 0$ है। यह बिन्दु B वक्र का नति परिवर्तन का बिन्दु (point of inflexion) कहलता है और स्पर्श रेखा को नति परिवर्तन स्पर्श रेखा (inflexional tangent) कहते हैं।

8.3 एक चर के फलनों में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ

उपरोक्त पृष्ठभूमि में अब हम एक चर के फलनों में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ पर विचार करेंगे। इनको स्पष्ट करने के लिए हम चित्र 8.6 में बताये फलन पर विचार करेंगे।



चित्र 8.6 (अ)



चित्र 8.6 (ब)

जैसा कि हम जानते हैं जब $\frac{dy}{dx} = 0$ है, वक्र के इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा x — अक्ष के समानान्तर होगी ।A एवं B ऐसे बिन्दु हैं। बिन्दु A उच्चिष्ठ है एवं बिन्दु B निम्निष्ठ है। इसलिए A एवं B के समान किसी बिन्दु के चरम मूल्य होने की अनिवार्य शर्त उस बिन्दु पर

$\frac{dy}{dx} = 0$ होना है। लेकिन जैसा कि चित्र 8.5 में बताया गया है हमें नति परिवर्तन का बिन्दु भी प्राप्त हो सकता है। इसलिए चित्र 8.5 में B बिन्दु न तो उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\frac{dy}{dx} = 0$ होना चरम मूल्य की आवश्यक शर्त है परन्तु पर्याप्त शर्त नहीं है।

अब हम चित्र 8.6 (अ) को देखें। इसमें < A भाग वर्द्धमान वक्र है अर्थात् $\frac{dy}{dx} > 0$ यद्यपि यह घटती हुई दर से वृद्धि को बताता है क्योंकि $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ । अगला भाग AM ह्रासमान वक्र है अर्थात्

$\frac{dy}{dx} < 0$, यद्यपि यह बढ़ती हुई दर से

घट रहा है क्योंकि $\frac{dy}{dx} < 0$ और $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ।

इस प्रकार कोई भी बिन्दु उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ इसका निर्णय निम्न आधारों पर किया जा सकता है। उस बिन्दु पर

$\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{d^2x} < 0$ होने पर वह उच्चिष्ठ है।

$\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{d^2x} > 0$ होने पर वह निम्निष्ठ है।

संक्षेप में

सामान्यतया

	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
अनिवार्य शर्त	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
पर्याप्त शर्त	$\frac{dy}{dx} = 0$ एवं $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$,	$\frac{dy}{dx} = 0$ एवं $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

192

अर्थशास्त्र में

	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
प्रथम कोटि की शर्त	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
द्वितीय कोटि की शर्त	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

उदाहरण 83

माना कि $y = 60 - 6x + x^2$ एक औसत लागत फलन है

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -6 + 2x = 0 \text{ (अनिवार्य शर्त)}$$

$$\therefore x = 3$$

अब यह जानने के लिए कि $x = 3$ पर फलन का उच्चिष्ठ बिन्दु है या निम्निष्ठ इस द्वितीय क्रम का अवकलन लेंगे।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +2 > 0$$

इसलिए वक्र नीचे की ओर उन्नतोदर है और $x = 3$ पर फलन का मूल्य न्यूनतम है; अर्थात् $x = 3$ पर औसत लागत न्यूनतम है $(Y = 60 - 6(3) + 3^2) = 60 - 18 + 9) = (y = 51)$

8.4 दो या अधिक चरों के फलनों में उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ

माना कि दिया हुआ फलन

$U = f(x, y)$ है।

इस प्रकार की स्थिति में चरम मूल्यों के लिए अनिवार्य एवं पर्याप्त शर्त प्राप्त करने के लिए हम आंशिक अवकलज लेते हैं। अर्थशास्त्र में $fx = 0$ एवं $fy = 0$ को प्रथम कोटि की शर्तें कहा जाता है एवं शर्तें fxx, fyy fxy को द्वितीय कोटि की शर्तें कहा जाता है। आर्थिक नियम प्राप्त करने के लिए द्वितीय कोटि की शर्तें महत्त्वपूर्ण होती हैं।

इसलिए

	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
आवश्यक शर्त	$\frac{\partial u}{\partial x} = fx = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = fx = 0$
	$\frac{\partial u}{\partial y} = fy = 0$	$\frac{\partial u}{\partial y} = fy = 0$

पर्याप्त शर्तें $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$ एवं

एवं $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right)^2$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right)^2$

यद्यपि जब

$$fx = 0, \; fy = 0 \text{ एवं } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right)^2$$

हो तो सैडल - बिन्दु होगा । सैडल- बिन्दु पर फलन का एक चर के प्रति न्यूनतम और दूसरे चर के प्रति अधिकतम होता है।

और जब $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right)^2$ हो तो जाँच विफल मानी जाती हैं। इन शर्तों को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :-

शर्तें	फलन u = f (x, y) के लिए			
	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ	सैडल-बिन्दु	कोई सूचना नहीं
प्रथम कोटि	fx = fy = 0	fx = fy= 0	fx = fy = 0	fx = fy= 0
द्वितीय कोटि	fxx< 0	fxx> 0		
	fyy < 0	fyy > 0		fxx fyy-(fxy)²
	fxx°fyy-(fxy)² > 0	fxx fyy-(fxy)²	fxx fyy-(fxy)²	
		> 0	> 0	= 0

इस प्रकार fx = fy = 0 एवं fxx fyy = (fxy)² होने पर हम दिये हुये फलन की प्रकृति के सम्बंध में कोई सूचना देने की स्थिति में नहीं होते।

उदाहरण 8.4

दिया हुआ फलन $u = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$ है।

हम u फलन के चरम मूल्य ज्ञात करेंगे। इसके लिए हमें प्रथम एवं द्वितीय कोटि की शर्तों का परीकलन निम्नानुसार करना होगा:-

प्रथम कोटि की शर्तें

$fx = 3x^2 - 3 = 0$ अथवा $3(x^2 - 1) = 0$

अथवा $x^2 - 1 = 0$

$fy = 3y^2 - 27 = 0$ अथवा $3(y^2 - 9) = 0$

अथवा $y^2 - 9 = 0$

इसलिए निर्देशांक हैं

(1, 3), (1, — 3), (— 1, 3), (— 1, — 3)

द्वितीय कोटि की शर्तें

fxx = 9x

fyy = 9y

fxy = 0

अब x = 1 और y = 3 होने पर (1, 3)

fxx = 9x = 9 > 0

fyy = 9y = 27 > 0

(fxx . fyy) — (fxy)^2 = (9x) (9y) — (0)^2

= (9 x 1) (9 x 3) — (0)^2

= 9 x 27 = 243 > 0

इस प्रकार निर्देशांक (1, 3) पर u का न्यूनतम बिन्दु है।

अब x = 1 एवं y = — 3 (1, — 3) होने पर

fxx = 9x = 9 > 0

fyy = 9y = — 27 < 0

fxx.fyy — (fxy)^2 = (9 x 1) (9x — 3) — 0

= (9) (— 27) = — 243 < 0

इस प्रकार निर्देशांक (1, — 3) पर सैड़ल-बिन्दु है।

अब x = — 1 एवं y = 3 (— 1, 3) होने पर

fxx = 9x = — 9 < 0

fyy = 9y = 27 > 0

fxx.fyy — (fxy)^2 = (— 9) (27) — (0)^2 = — 243 < 0

इस प्रकार पुनः (—1, 3) पर सैड़ल-बिन्दु है।

जब x = — 1 एवं y = — 3 (—1, — 3) होने पर

fxx = 9 x = — 9 < 0

fyy = 9y = — 27 < 0

fxx.fyy — (fxx)^2 = (— 9) (— 27) = 243 >0

इस प्रकार x = — 1 एवं y = — 3 पर u अधिकतम है।

उपरोक्त विवेचन में हमने आंशिक अवकलनों का उपयोग करते हुये दो चरों के फलन के चरम मूल्य निर्धारित करने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्तों को जाना है। यद्यपि अर्थशास्त्र में हें ऐसी समस्यायें भी मिलती हैं जिनमें दो से अधिक चर होते हैं (मांग का सिद्धान्त, उत्पादन सिद्धान्त आदि)। ऐसी स्थिति में समस्या जटिल हो जाती है, क्योंकि

कभी-कभी द्वितीय कोटि की शर्तों के निहितार्थों का अध्ययन करना भी आवश्यक होता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए एक वैकल्पिक विधि है जिसमें अवकलों का उपयोग किया जाता है। इस विधि को समझने के लिए हम दो चरों वाले फलन को लेते हैं। माना कि दिया हुआ फलन

$U = f(x, y)$ है।

चरम मूल्य की आवश्यक शर्त है।

$du = df = fx.dx + fy.dy = 0$

इसका आधार यह है कि चरम मूल्य के बिन्दु पर स्पर्श रेखायें $x - y$ तल के समानान्तर होती है और U का मूल्य स्थिर होता है, इसलिए $du = 0$ होता है। इसके अतिरिक्त, हम यह भी कह सकते हैं कि उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ का निर्धारण करने के लिए अतिरिक्त शर्त du में परिवर्तन से सम्बन्धित है। इसलिए, निम्निष्ठ के लिए पर्याप्त शर्तें $du = 0$ एवं $d^2u > 0$ है।

इसी प्रकार उच्चिष्ठ के लिए पर्याप्त शर्तें $du = 0$ एवं $d^2u < 0$ है। यदि $d^2u = 0$ हो तो d^3u पर जाना होगा परन्तु ऐसी परिस्थिति विरल होती है। इस प्रकार शर्तें हैं —

उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
$du = 0$	$du = 0$
$d^2u < 0$	$d^2u > 0$

जहा $d^2u = fxx.d^2x + fyy.d^2y + 2\,fxy\;dx.dy$

चूंकि $du = 0$ है, इसमें अन्तर्निहित है कि

$fx = 0$ एवं $fy = 0$

द्वितीय कोटि की शर्त $d^2u > 0$, के लिए आवश्यक है

$fxx > 0,\; fxx.fyy - (fxy)^2 > 0$

इस प्रकार निम्निष्ठ के लिए पर्याप्त शर्तें $du = 0$ एवं $d^2u > 0$ है। आंशिक अवकलज की शब्दावली में यह होगी।

$fx = 0 \quad ; \quad fy = 0$

$fxx > 0 \quad ; \quad fxx.fyy - (fxy)^2 > 0$

उच्चिष्ठ के लिए पर्याप्त शर्तें हैं $du = 0$ एवं $d^2u < 0$, आंशिक अवकलन की शब्दावली में होगी।

$fx = 0 \;;\; fy = 0$

$fxx < 0; \qquad fyy < 0$

$fxx.fyy - (fxy)^2 > 0$

उदाहरण 8.5

$u = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$

प्रथम कोटि की शर्त

$du = fx\ dx + fy.dy$

$du = (3x^2 - 3)\ dx + (3y^2 - 27)\ dy = 0$

अथवा $(3x^2 - 3) = 0$ अथवा $3y^2 - 27 = 0$

$x^2 - 1 = 0$ $3(y^2 - 9) = 0$

$x = \pm 1$ $y^2 - 9 = 0$

$y = \pm 3$

सूचकांक है (1, 3), (1, — 3), (— 1, 3)., (— 1, — 3)

द्वितीय कोटि की शर्तें

$d^2u = fxx.\ d^2x + fyy.d^2y + 2fxy\ dx.dy.$

$fxx = 9x;$ $fxy = 0$

$fyy = 9y$

$\therefore\ d^2u = 9\ x.d^2x + 9y\ d^2y + 0$

निर्देशांक (1, 3) अर्थात $x = 1$ और $y = 3$ होने पर

$d^2u = 9\ d^2x + 27\ d^2y > 0$

इस प्रकार यह न्यूनतम बिन्दु है।

यदि निर्देशांक (1, — 3) अर्थात् $x = 1$ और $y = -3$ होने पर

$d^2u = 9\ dx^2 - 27dy^2$

यह अनिर्धारणीय स्थिति है।

निर्देशांक (— 1, 3) अर्थात् $x = -1$ और $y = 3$ लेने पर

$d^2u = 9\ dx^2 + 27\ dy^2$

यह भी एक अनिर्धारणीय स्थिति है।

निर्देशांक (— 1, — 3) अर्थात् $x = -1$ और $y = -3$ होने पर

$d^2u = 9\ dx^2 - 27dy^2 < 0$

अतः यह उच्चतम बिन्दु है।

अभ्यास - 6 निम्न फलन का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये-

$Y = -x^2 + 4x + 7$

हल-

सर्व प्रथम हम y फलन का अवकलन फलन प्राप्त करते हैं

$$f^1(x) = \frac{dy}{dx} = -2x + 4$$

क्रान्तिक संख्या अर्थात् x का वह मूल्य जहां $f^1(x) = 0$ हो, प्राप्त करने के लिए हम अवकलन फलन को शून्य के बराबर रखकर निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं

$$-2x + 4 = 0$$

x के लिए उपरोक्त समीकरण को हल करने पर हमें $x = 2$ प्राप्त होता है।

$x = 2$ होने पर

$y = -4 + 8 + 7 = 11$ होगा।

11 दिये हुये फलन का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मूल्य है? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने हेतु हमें y फलन के द्वितीय क्रम के अवकलन

$\frac{d^2y}{dx^2}$ या $f^{11}(x)$ का चिन्ह ज्ञात करना होगा।

$\frac{dy}{dx}$ का x के संदर्भ में अवकलन

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$$

चूंकि दिये हुये फलन के द्वितीय क्रम के अवकलज का मूल्य ऋणात्मक है, अतः 11 फलन का उच्चिष्ठ मूल्य है।

अभ्यास - 7

फलन $y = 2x^2 + x$ का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये।

हल -

सर्व प्रथम हम फलन का अवकलज फलन ज्ञात करेंगे

$$f^1(x) = \frac{dy}{dx} = 4x + 1$$

x के लिये उपरोक्त समीकरण हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$$x = -\frac{1}{4}$$

जहां $x = -\frac{1}{4}$ है।

$$y = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = - \frac{1}{8}$$

$-\frac{1}{8}$ फलन का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मूल्य है?

इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए द्वितीय क्रम के अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ का चिन्ह ज्ञात करना होगा।

$\frac{dy}{dx}$ का x के संदर्भ में अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = 4 > 0$$

द्वितीय क्रम के अवकलज का मूल्य घनात्मक है अतः

$-\frac{1}{8}$ दिये हुये फलन का न्यूनतम मूल्य है।

अभ्यास - 8

निम्न फलन के सापेक्ष चरम मूल्य ज्ञात कीजिये

$$y = x^3 - 3x + 5$$

सर्व प्रथम हम y फलन का अवकलज फलन ज्ञात करेंगे

$$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = 3x^2 - 3$$

क्रान्तिक संख्यायें, अर्थात् x के वे मूल्य जिन पर $f^1(x) = 0$ हो, ज्ञात करने के लिये हम अवकलज फलन को शून्य के बराबर रखकर निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं

$3x^2 - 3 = 0$

या $3x^2 = 3$

या $x^2 = 1$

$\therefore$ $x = \pm 1$

अर्थात x का मूल्य + 1 या — 1 क्रान्तिक मूल्य हैं।

$x = -1$ होने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$= 6(-1) = -6 < 0$$

अतः $x = -1$ लेने पर y का मूल्य उच्चिष्ठ होगा।

$$Y = (-1)^3 - 3(-1) + 5$$
$$= -1 + 3 + 5$$
$$= 7$$

$x = +1$ होने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 6 > 0$$

अतः $x = 1$ लेने पर y फलन का निम्निष्ठ मूल्य

$$y = 1 - 3 + 5 = 3 \text{ है।}$$

अब तक हमने प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की तकनीकों का ज्ञान प्राप्त किया है। अब हम प्रतिबन्धित अनुकूलतमावस्था ज्ञात करने की विधियाँ सीखेंगे। पहले हम अनुकूलतमीकरण (optimisation) की धारणा पर विचार करेंगे।

8.5 प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की धारणा

पूर्व खण्ड में हमने दो विकल्प चरों की स्थिति में उद्देश्य फलन के चरम मूल्य ज्ञात करने की सामान्य विधि की जानकारी प्राप्त की है। उस खण्ड में बताई गई विधि की एक विशेषता यह है कि दोनों विकल्प चर एक दूसरे से स्वतंत्र हैं, अर्थात् एक चर के सम्बंध में लिया गया निर्णय दूसरे चर के सम्बन्ध में चयन से नहीं टकराता। उदाहरण के लिये दो वस्तुयें पैदा करने वाली फर्म दोनों वस्तुओं (Q_1 एवं Q_2) की कोई भी मात्रा जो वह चाहे चयन कर सकती है- दोनों चयन एक दूसरे का परिसीमन नहीं करते। किसी न किसी प्रकार से यदि वह फर्म इस प्रतिबंध का पालन करना चाहती है कि दोनों वस्तुओं का कुल उत्पादन 1000 इकाई हो ($Q_1 + Q_2 = 1000$), तो विकल्प चरों के बारे में स्वतंत्रता समाप्त हो जाती है। ऐसी स्थिति में फर्म का लाभ अधिकतमीकरण उत्पादन स्तर $\bar{Q}_1$ व $\bar{Q}_2$ न केवल युगपद लेंगे बल्कि परस्पर निर्भर भी क्योंकि $\bar{Q}_1$ अधिक लेने पर $\bar{Q}_2$ कम होगा ताकि कुल उत्पादन 1000 इकाई रहे। उत्पादन-कोटा को संतुष्ट करने वाला ऐसा अनुकूलतम प्रतिबन्धित अनुकूलतम होगा, जो साधारणतया स्वतंत्र अुकूलतम से भिन्न होगा, जिसे पिछले खण्ड में समझाया जा चुका है।

ऊपर बताया गया उत्पादन की निर्धारित मात्रा जैसा प्रतिबन्ध दो चरों में, उनकी विकल्प चरों के रूप में भूमिका के रूप में, एक सम्बन्ध स्थापित करता है। प्रतिबन्ध को लागू करने का प्राथमिक उद्देश्य विचारणीय अनुकूलतमीकरण की समस्या में उपस्थित परिसीमन घटकों को ध्यान में लाना है। अर्थशास्त्र में हमारे समक्ष अनुकूलतमीकरण की जो समस्यायें आती हैं उनमें से बहुत सी प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की समस्यायें होती हैं। एक उपभोक्ता अपने बजट प्रतिबन्ध के अन्दर अपनी संतुष्टि को अधिकतम करता है। एक उत्पादक फलन द्वारा दिये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत लागत को न्यूनतम करता है।

उत्पादन की निर्धारित मात्रा के कारण उत्पादन चयनों पर लगने वाले प्रतिबन्धों को आप ऊपर देख चुके हैं। प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की प्रकृति को ठीक प्रकार से समझने के लिये हम एक उपभोक्ता को लेते हैं जिसका उपयोगिता फलन निम्न है -

$$U = x_1 x_2 + 2x_1 \quad (1)$$

जहां सीमान्त उपयोगितायें आंशिक अवकलज हैं

$$U_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \text{ एवं } U_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

एवं वे x_1 एवं x_2 के सभी घनात्मक मूल्यों के लिये घनात्मक हैं। ऐसी स्थिति में बिना किसी प्रतिबन्ध U_1 को अधिकतम करने के लिये उपभोक्ता को दोनों वस्तुओं की **अनन्त** मात्रायें खरीदनी चाहियें। यह एक ऐसा हल है जो व्यावहारिक दृष्टि से नगण्य संगतता रखता है। अनुकूलतमीकरण की समस्या को अर्थपूर्ण बनाने के लिये उपभोक्ता की क्रयशक्ति को भी ध्यान में लिया जाना चाहिए। समस्या में बजट प्रतिबन्ध को शामिल करके हम ऐसा कर सकते हैं। स्मरणीय है कि किसी भी उपभोक्ता के पास असीमित या अनन्त क्रय-शक्ति (अर्थात मुद्रा) नहीं होती। यदि उपभोक्ता एक निश्चित धनराशि माना कि रू. 60/- दो वस्तुओं पर व्यय करना चाहता है और प्रचलित बाजार मूल्य $P_1 = 4$ एवं $P_2 = 2$ है, तो बजट प्रतिबन्ध को एक रेखीय समीकरण के रूप में निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर सकते हैं

$$4x_1 + 2x_2 = 60 \text{ या } 4x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \quad (2)$$

इस प्रकार के प्रतिबन्ध, जैसे कि पूर्व में उल्लिखित निर्धारित उत्पादन मात्रा, $\bar{x}_1$ एवं $\bar{x}_2$ के चयन को परस्पर निर्भर बना देंगे। यदि उपभोक्ता x_1 की अधिक मात्रा चाहता है तो ऐसा वह x_2 की कम मात्रा रखकर ही कर सकता है। अथवा x_2 की अधिक मात्रा तब तक ही रख सकता है जब वह x_1 कम मात्रा रखने को तत्पर हो। अब समस्या समीकरण — 2 में बताये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समीकरण 1 का अधिकतमीकरण करने की है। अब हम उपरोक्त प्रकार की प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की समस्या को हल करने की तीन विधियों पर विचार करेंगे (प्रतिबन्धों को restraints, side relations या subsidiary conditions भी कहा जाता है)

8.6 विकल्प चरों के क्रान्तिक मूल्य ज्ञात करना

8.6.1 (क) प्रतिस्थापन रीति (Technique of substitution)

कुछ परिस्थितियों में प्रतिबन्धों से प्राप्त समीकरण को, उस फलन में जिसे अधिकतम या न्यूनतम करना हैं, प्रतिस्थापित किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में समस्या प्रतिबन्ध रहित अधिकतमकरण या न्यूनतमकरण की समस्या में बदल जाती है और पिछले खण्ड में बताई गई विधि ही काम में आती है।

पिछले खण्ड में दिये गये उदाहरण में बजट प्रतिबन्ध ($4x_1 + 2x_2 = 60$) से निम्न समीकरण प्राप्त होती है

$$x_2 = \frac{60 - 4x_1}{2} = 30 - 2x_1 \qquad (2^1)$$

हम उद्देश्य फलन में (2^1) को (1) में प्रतिस्थापित करके प्रतिबन्ध को उद्देश्य फलन में संयुक्त कर सकते हैं। इसका परिणाम यह होगा कि उद्देश्य फलन केवल एक चर वाले फलन में बदल जावेगा।

$$\begin{aligned} U &= x_1 x_2 + 2x_1 \ (1) \\ U &= x_1 (30 - 2x_1) + 2x_1 \\ &= 30x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 \\ &= 32x_1 - 2x_1^2 \end{aligned}$$

अब हम इस फलन को पिछले खण्ड में बताई गई अनुकूलतमीकरण की साधारण विधि से हल कर सकते हैं।

उपयोगिता फलन के प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर रखने पर $U = 32x_1 - 2x_1^2$

$$\frac{dU}{dx_1} = 32 - 4x_1 = 0$$

इस समीकरण को हल करने पर

$$4\bar{x}_1 = 32$$

$$\bar{x}_1 = 8$$

समीकरण (2^1) में $\bar{x}_1$ का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= 30 - 2x_1 \\ &= 30 - 16 \\ &= 14 \end{aligned}$$

अब हम समीकरण (1) से U का क्रान्तिक मूल्य अर्थात् प्राप्त होने वाली कुल संतुष्टि जान सकते हैं —

$$\begin{aligned} \bar{U} &= x_1 x_2 + 2x_1 \\ &= (8 \times 14) + (2 \times 8) = 112 + 16 = 128 \end{aligned}$$

U का क्रान्तिक मूल्य इसका प्रतिबन्धित उच्चिष्ठ मूल्य है क्योंकि द्वितीय अवकलज का मान शून्य से कम है

$$\frac{d^2u}{dx_1^2} = -4 < 0$$

अनुकूलतमीकरण की समस्या का क्रान्तिक मूल्य निकालने की यह पद्धति सरल है। किन्तु उद्देश्य फलन में दो से अधिक चर होने और कई प्रतिबन्ध होने पर चरों के प्रतिस्थापन एवं विलोपन करने की विधि भार रूप हो जाती है। इसलिये आपको प्रतिबन्धिता अनुकूलतमीकरण की समस्या को हल करने की दूसरी विधि बताई जावेगी, जो अधिक शक्तिशाली है और विश्लेषणात्मक प्रकृति की समस्याओं में अधिक उपयुक्त है। इसे यह लैंगरेन्जियन गुणांक (Lagrangean multipliers) विधि कहा जाता है।

8.6.2 लैगरेंजियन गुणांक विधि (Lagrange — multiplier method)

समानता के प्रतिबन्ध के साथ फलनों के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ प्राप्त करने के लिए सर्वाधिक विधि लैगरेंजियन गुणांक विधि है। इस विधि का सार यह है कि प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की समस्या को इस रूप में बदल दिया जाय कि प्रतिबन्ध रहित चरम मूल्य प्राप्त करने की समस्या की प्रथम अवकलज की शर्तें लागू हो सकें।

सरलता के लिये हम पहले खण्ड में बताई गई संतुष्टि अधिकतमकरण की समस्या को इस विधि से हल करेंगे।

अधिकतमीकरण की दी हुई समस्या

$U = x_1 x_2 + 2x_1$

बजट प्रतिबन्ध $4x_1 + 2x_2 = 60$

या $4x_1 + 2x_2 - 60 = 0$

उद्देश्य फलन में प्रतिबन्ध को संयुक्त करने पर संवर्धित उद्देश्य फलन (augmented objective function) इस प्रकार लिखा जावेगा —

$$z = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda (4x_1 + 2x_2 - 60) \quad .. (3)$$

ग्रीक वर्णमाला का अक्षर λ (लेम्बड़ा), अभीतक अनिर्धारित संख्या का प्रतिनिधित्व करता है। इसे लैगरेंज या लैगरेंजियन (अनिर्धारित) गुणांक कहते हैं। यदि हम किसी प्रकार यह सुनिश्चित कर सकें कि $4x_1 + 2x_2 - 60 = 0$ है, तो प्रथम शर्त पूरी हो जावेगी और समीकरण (3) में तीसरा पद विलुप्त हो जावेगा, चाहे λ का मूल्य कुछ भी हो। तब Z फलन U फलन के समान होगा। अन्तर केवल इतना होगा कि U फलन का प्रतिबन्धित उच्चिष्ठ ज्ञात करने के स्थान पर z फलन का स्वतंत्र उच्चिष्ठ ज्ञात करना होगा। समीकरण (3) में कोष्ठकीय अभिव्यक्ति को विलोप करने हेतु निम्न विधि अपनावेंगें —

हम λ को एक अतिरिक्त चर मानेंगे। ऐसी स्थिति में स्वतंत्र-चरम मूल्य (free entremum) की प्रथम शर्त तीन युगपत समीकरणों के सैट के रूप में होगी :

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2 + 2 + 4 \lambda = 0 \quad (i)$$

$$Z_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda = 0 \quad (4) \qquad (ii)$$

$$Z_\lambda = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 4x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \ (iii)$$

तीसरी समीकरण स्वाभाविक रूप से प्रतिबन्ध की **संतुष्टि** की गारंटी है

इस प्रकार, प्रतिबंध को लैगरैज गुणांक को एक अतिरिक्त **चर** मानते हुये संवर्धित उद्देश्य फलन में शामिल करके हम z के क्रान्तिक मूल्य का गोपन (screening) करके हम प्रतिबन्धित चरम मूल्य फलन प्राप्त कर सकते हैं, जो एक स्वतंत्र या प्रतिबन्ध रहित फलन है।

उपरोक्त युगपत समीकरणों के समुच्चय (4) को हल करने पर हमें x_1, x_2 एवं λ का मूल्य प्राप्त होगा।

(ii) को 4 से गुणा कर (iii) में से घटाने पर

$$\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \\ \underline{-4x_1 \qquad \pm 8\lambda = 0} \\ \qquad 2x_2 - 8\lambda = 60 \end{array}$$

अथवा $x_2 - 4\lambda = 30 \quad (vi)$

(iv) को (i) से घटाने पर

$$\begin{array}{l} x_2 + 4\lambda = -2 \\ x_2 - 4\lambda = \ \ 30 \\ \underline{- \quad + \qquad -} \\ \quad 8\lambda = -32 \\ \quad \lambda = -4 \end{array}$$

(ii) में λ का मूल्य रखने पर

$$x_1 = -2(-4) = 8$$

(i) में λ का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$$x_2 + 2 + 4(-4) = 0$$
$$x_2 = 14$$

इस प्रकार $\bar{x}_1 = 8$, $\bar{x}_2 = 14$ एवं $\bar{\lambda} = -4$ क्रान्तिक मूल्य हमें प्राप्त होंगे। यहां भी $\bar{x}_1$ एवं $\bar{x}_2$ का मूल्य वही प्राप्त हुआ है जो हमें प्रतिस्थापन पद्धति से प्राप्त हुआ था। यहां ध्यान देने योग्य बात्त यह है कि प्रतिस्थापन विधि में λ के मूल्य (जो अब एक निश्चित संख्या है) का कोई प्रतिरूप नहीं होता।

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि

$$\bar{Z} = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda (4x_1 + 2x_2 - 60)$$
$$= (8 \times 14) + (2 \times 8) + \lambda (0)$$
$$= 112 + 16 + \lambda (0)$$
$$= 128$$

यह मूल्य वही है जो हमें पहले प्रतिस्थापन विधि काम में लेने पर प्राप्त हुआ था।

सामान्य रूप से, एक उद्देश्य फलन

$s = f(x, y)$ दिया हुआ हो (5)

एवं प्रतिबन्ध हो $g(x, y) = 0$ (6)

जिसे सदैव किसी फलन को शून्य के बराबर करके निरूपित किया जाता है।

तो हम संवर्धित उद्देश्य फलन को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:-

$$z = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (7)$$

जिसमें मात्रा λ (लैगरेंज गुणांक), x एवं y से स्वतंत्र है एवं अज्ञात है। **z** फलन का x, y और λ के संदर्भ में आंशिक अवकलन करने और प्राप्त समीकरण को शून्य के बराबर रखने पर आवश्यक शर्त है —

$$Zx = \frac{\partial z}{\partial x} = fx + \lambda gx = 0 \text{ (i)}$$

$$Zy = \frac{\partial z}{\partial y} = fy + \lambda gy = 0 \quad \text{(ii)} \qquad (8)$$

$$Z\lambda = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0 \quad \text{(iii)}$$

चूंकि उपरोक्त समीकरण 8 (iii) प्रतिबन्ध (6) का पुनर्कथन मात्र है, अतः संवर्धित उद्देश्य फलन z के क्रान्तिक मूल्य स्वाभाविक रूप से मूल कथन s के प्रतिबन्धों को पूरा करेंगे।

चूंकि $\lambda g(x, y)$ अब निश्चित रूप से शून्य है, समीकरण (7) में z का क्रान्तिक मान प्रतिबन्ध (6) के साथ, समीकरण (5) के अनुरूप होना चाहिए।

द्वितीय क्रम की शर्तों को जानने से पूर्व हम उपरोक्त सामान्य प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों से समझ लें।

अभ्यास — 9

निम्न फलन का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये —

$s = xy$

प्रतिबन्ध $x + y - 4 = 0$

हल —

उपरोक्त फलन का संवर्धित उद्देश्य फलन

$z = xy + \lambda (x + y - 4) = 0$

z के क्रान्तिक मूल्य के लिये यह आवश्यक है कि

$zx = y + \lambda = 0$

$zy = x + \lambda = 0$

$z\lambda = x + y - 4 = 0$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर हमें निम्न मूल्य प्राप्त होते हैं।

$\bar{x} = 2, \quad \bar{y} = 2$ एवं $\lambda = 2$

$\bar{z} = \bar{s} = 9$ क्रान्तिक मूल्य है। यह अधिकतम अथवा न्यूनतम मूल्य है या इनमें से कोई भी नहीं है यह जानने हेतु, हमें द्वितीय क्रम की शर्त पर इसकी जांच करनी होगी।

अभ्यास- 10

निम्न फलन का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये

$s = x^2 - y^2 + xy + 5x$

प्रतिबन्ध $x - 2y = 0$

हल:

सर्वप्रथम हम संवर्धित उद्देश्य फलन लिखते हैं —

$z = x^2 - y^2 + xy + 5x + \lambda (x - 2y)$

z के क्रान्तिक मूल्य के लिये आवश्यक है कि

$$zx = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 5 + \lambda = 0$$

$$zy = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + x - 2 = 0$$

$$z\lambda = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = x - 2y = 0$$

उपरोक्त तीन समीकरणों को क्रेमर के नियम (ईकाई 14) या अन्य किसी रीति से हल करने पर हमें निम्न मूल्य प्राप्त होंगे —

$$\bar{x} = -2, \quad \bar{y} = -1, \quad \bar{\lambda} = 0$$

एवं

$$\bar{s} = \bar{z} = -5$$

s का क्रान्तिक मूल्य अधिकतम है, न्यूनतम है अथवा इनमें से कोई नहीं, इसका निर्णय द्वितीय क्रम की जांच के आधार पर किया जा सकेगा, जिस पर हम आगे विचार करेंगे।

8.6.3 (ग) सकल अवकलन रीति (Total, Differential Approach)

एक फलन के सकल अवकलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है

$$w = f(x, y, z) \qquad \text{(फलन)}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

अलग-अलग पदों को कभी-कभी क्रमशः x, y, और z के सापेक्ष w के आंशिक अवकलन कहा जाता है। एक फलन के आंशिक अवकलनों का योग सकल अवकलन होता है। सामान्य रूप से एक फलन का सकल अवकलन

$$w = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

इसके सभी आंशिक अवकलनों का योग होता है।

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

यदि x भी किसी अन्य चर, t, के अवकलनीय फलन हों तो

$$dx_i = \frac{dx_i}{dt} dt$$

और x दो चरों, जैसे r, एवं s के अवकलनीय फलन हो तो

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial r} dy + \frac{\partial x_i}{\partial s} ds$$

अभ्यास - 11

यदि $s = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ हो जहाँ $x = 2t$, $y = \dfrac{1}{t}$ एवं $z = t^2$ है,

$\frac{ds}{dt}$ ज्ञात कीजिये।

हल –

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y} \quad \frac{dy}{dt} + \frac{\partial s}{\partial z} \quad \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{1}{y} (2) + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) + \left(-\frac{y}{z^2}\right) (2t)$$

$$= \frac{2}{y} + \frac{x}{y^2t^2} - \frac{1}{zt^2} - \frac{2yt}{x^2}$$

x, y और z का मूल्य प्रति स्थापित करने पर

$$\frac{ds}{dt} = 2t + \frac{2tt^2}{t^2} - \frac{1}{t^2t^2} - \frac{2t}{tt^4}$$

$$\frac{ds}{dt} = 2t + 2t - \frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^4} = 4t - \frac{3}{t^4}$$

सकल अवकलन रीति में अप्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की प्रथम शर्त को निम्न रूप में व्यक्त किया जावेगा –

$$s = f\ (x,\ y)$$

$$ds = fx\ dx + fy.dy. \tag{9}$$

शर्त पूरी होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त है कि दोनों आंशिक अवकलज fx एवं fy युगपत (simultaneously) शून्य के बराबर हों। इस प्रकार प्रथम कोटि की शर्त का रूप होगा।

$$fx = fy = 0 \quad \text{या} \left[\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = 0\right]$$

यह कथन प्रतिबन्ध g (x, y) = 0 को जोड़ने पर भी मान्य रहता है। लेकिन यहां अब हमें dx एवं dy दोनों पहले के समान "स्वैच्छिक विचरण' नहीं लेना चाहिए। अतः यदि g (x, y) = 0 है तो

$$dg = gx\ .\ dx + gy\ .\ dy = 0 \tag{10}$$

ताकि समीकरण (9) में dx एवं dy का परिमाण समीकरण (10) द्वारा प्रतिबन्धित हो जाये। इसलिये अब प्रथम कोटि की आवश्यक शर्त ds = 0 (9) हो जाती है बशर्ते कि g = 0 हो ओर dg = 0 भी शून्य हो। इसे संतुष्ट करने के लिये हमें निम्न परिणाम प्राप्त होने चाहिएं।

$$\frac{fx}{gx} = \frac{fy}{gy} \qquad (11)$$

इस परिभाषा की प्राप्ति समीकरण 10 को dy के सन्दर्भ में हल करके परिणाम को समीकरण 10 में प्रतिस्थापित करके की जा सकती है।

प्रतिबन्ध g (x, y) = 0 के साथ शर्त (II) से दो समीकरण प्राप्त होंगे। यहाँ यह ध्यान रखें कि अब भी प्रतिबंध को शर्त (II) के साथ विचार में लेना है। जब g = o है तो स्वाभाविक रूप में dg = 0 होगा किन्तु इससे विपरीत सही नहीं है।

dg = 0 में यह निहित है कि g = a (अचर मूल्य) है जो शून्य होना आवश्यक नहीं है। इसीलिये जब तक प्रतिबन्ध की स्पष्ट रूप से व्याख्या न कर दी जावे, समस्या में कुछ सूचना छूट जावेगी।

इस बात की आसानी से जांच की जा सकती है कि सकल अवकलन पद्धति से भी वही आवश्यक शर्त प्राप्त होती है जो लैगरेंज गुणांक पद्धति से प्राप्त हुई है। समीकरण (8) की तुलना अभी प्राप्त परिणाम से कीजिये। समीकरण 8 (iii) केवल प्रतिबन्ध का दुहराव है। नये परिणाम भी प्रतिबन्ध की संतुष्टि चाहते हैं। समीकरण समूह (8) की प्रथम दो समीकरणों को क्रमशः निम्नानुसार लिखा जा सकता है —

$$\frac{fx}{gx} = -\lambda \text{ एवं } \frac{fy}{gy} = -\lambda \qquad (ii)$$

ये समीकरण भी निश्चित रूप से समीकरण 11 के समान ही सूचना प्रदान करती है। इनमें समीकरण 11 से भिन्न केवल यह बात है कि चिन्ह — λ का स्पष्टतया उपयोग किया गया है, जो निम्न अनुपात को बताता है

$$\frac{fx}{gx} = \frac{fy}{fy}$$

इसलिये, दोनों परिणाम पूर्णातया समान हैं।

8.7 प्रतिबन्धित अनुकूलतम की द्वितीय कोटि की शर्तें

हम पहले उल्लेख कर चुके हैं (10) कि प्रतिबन्ध g (x, y) = 0 का तात्पर्य यह है कि

$$dg = gx \,.\, dx + gy \,.\, dy = 0$$

अब dx एवं dy दोनों स्वैच्छिक नहीं हैं। हम अब भी दोनों में से एक को स्वैच्छिक विचरण मान सकते हैं। यदि हम dx को स्वैच्छिक विचरण मानते हैं तो dy को dx पर निर्भर मानना होगा, ताकि समीकरण (10) संतुष्ट हो सके, अर्थात्

$$dy = \left(\frac{-gx}{gy}\right) dx$$

d^2s के लिये उपयुक्त अभिव्यक्ति प्राप्त करने के लिये हमें अवकलन करते समय dy को एक चर के रूप में मानना चाहिये, यदि हमें dx को एक अचर मूल्य (constant) मानना है। इस प्रकार

$$d^2s = d\ (ds) = \frac{\partial\ (ds)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\ (ds)}{\partial y}\ dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\ (fx\ dx + fy\ dy)\ dx + \frac{\partial}{\partial y}\ (fx\ dx + fy\ dy)\ dy$$

$$= [fxx\ dx + (fxy.\ dy + fy\ \frac{\partial\ (dy)}{dx})]\ dx$$

$$+ [fyx\ dx + (fyydy + fy\ \frac{\partial\ (dy)}{\partial y}]\ fy$$

$$= fxx\ d^2x + fxy\ dxdy + fy\ \frac{\partial\ (dy)}{\partial x}$$

$$+ fyx\ dxy + fyy\ d^2y + fy\ \frac{\partial\ (dy)}{\partial y}\ dy$$

तीसरे एवं छठे पद को लघुकृत करने पर

$$fy\ \left[\frac{\partial\ (dy)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\ (dy)}{\partial y}\ dy\right] = fyd\ (dy) = fy\ d^2y$$

अतः वे s के लिये वांछित अभिव्यक्ति है

$$d^2s = fxx\ dx^2 + 2\ fxy\ dx\ dy + fyy\ dy^2 + fy\ d^2y \qquad (12)$$

यहाँ यह नोट करें कि अन्तिम पद (fy d^2y) एक घातीय है (d^2y और $(dy)^2$ दोनों एक ही नहीं हैं)। समीकरण 12 में d^2y की उपस्थिति इसको द्विघातीय नहीं बनाती। लेकिन d^2s को प्रतिबन्ध g (x, y) = 0 के कारण द्विघाती रूप में बदला जा सकता है। क्योंकि dg = 0 है, इसलिए यह स्वाभाविक है कि d^2g = d (dg) = 0 हो, ताकि समीकरण (12) में प्रयुक्त प्रक्रिया से हमें निम्न परिणाम प्राप्त हों।

$$d^2g = g_{xx}\ d^2x + 2gxy\ \ dxdy + g_{yy}\ d^2y + g_y\ d^2y = 0$$

इस अन्तिम समीकरण को d^2y के लिये हल करने पर हमें प्राप्त होता है —

$g_y \cdot d^2y = - g_{xx}\ dx^2 - 2g_{xy}\ dxdy + g_{yy}\ d^2y$

$d^2y = (- g_{xx}/g_y)\ d^2x - (2g_{xy}/g_y)\ dxdy + (g_{yy}/g_y)d^2y$

इस परिणाम को समीकरण (12) में रखने पर

$$d^2s = (fxx\ \frac{fy}{g_y}\ g_{xx})\ dx^2 + 2\ (fxy - \frac{fy}{hy}\ g_{xy})\ dxdy$$

$$+ (fyy - \frac{fy}{g_y}\ g_{yy})\ dy^2$$

समीकरण (ii) के अनुसार $fx/gx = fy/gy = -\lambda$

उपरोक्त परिणाम के आधार पर प्रथम कोष्ठकीय गुणांक को $(fxx + \lambda g_{xx})$ के रूप में लघु किया जा सकता है। इसी प्रकार अन्य पदों के लिये। यद्यपि समीकरण (8) का द्वितीय कोटि का आंशिक अवकलन करने पर आप पायेंगे कि

$z_{xx} = f_{xx} + \lambda g_{xx}$; $z_{xy} = f_{xy} + \lambda g_{xy} = z_{yx}$

एव $z_{yy} = f_{yy} + \lambda g_{yy}$

ऊपर के कोष्ठकीय गुणांक के सुनिश्चित रूप से समान हैं। इसलिये, यदि हम संवर्धित उद्देश्य फलन का उपयोग करते हैं तो हम d^2s को अधिक स्पष्ट रूप से निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :-

$d^2s = z_{xx}\ d^2x + z_{xy}\ dxdy + z_{yx}\ dydx + z_{yy}\ d^2y$ ..... (12^1)

इस प्रकार

फलन $s = f\ (x, y)$ और

प्रतिबन्ध $g\ (x, y) = 0$ लेने पर चरम मूल्य प्राप्त करने के लिये द्वितीय कोटि की शर्त को d^2s की घनात्मक या ऋणात्मक निश्चितता के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यहां पर हमारी रूचि dx एवं dy के सभी सम्भव मूल्यों के लिये d^2s की चिन्हगत सुनिश्चितता जानने में न होकर केवल उस स्थिति से है जहां समीकरण $dg = 0$ (10) संतुष्ट होती हो। इस प्रकार चरम मूल्य के लिए द्वितीय कोटि की शर्त को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है —

न्यूनिष्ठ s : d^2s घनात्मक सुनिश्चित हो, जबकि $dg = 0$ हो

उच्चिष्ठि s : d^2s ऋणात्मक सुनिश्चित हो जबकि $dg = 0$ हो।

हम द्वितीय कोटि की इस शर्त को सारणिक के रूप में व्यक्त कर सकते है। ऐसा करने से पूर्व हमें दो चरों के द्विघातीय रूप और एक रेखीय प्रबिन्ध की स्थिति का विश्लेषण कर लेना चाहिए।

$q = q\mu^2 + 2h\mu v + b\vartheta^2$ एक फलन है और प्रतिबन्ध $\alpha\mu + \beta\vartheta = 0$ है।

प्रतिबन्ध में अन्तर्निहित है कि $\vartheta = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \mu,$

अतः हम q को एक चरीय फलन के रूप में पुनः निम्न प्रकार से लिख सकते हैं —

$$q = a\mu^2 \ 2h \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) 4^2 \ + b \frac{\alpha^2}{\beta^2} \mu^2$$

$$= a\beta^2 - 2h\alpha\beta + b\alpha^2) \ (\mu^2 / \ \beta^2)$$

यह स्वाभाविक है कि q तभी घनात्मक (ऋणात्मक) सुनिश्चित होगा जबकि कोष्ठकीय अभिव्यक्तियाँ घनात्मक (ऋणात्मक) हों। अब ऐसा होता कि निम्न सारणीक

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} = 2h\alpha\beta - a\beta^2 - b\alpha^2$$

उपरोक्त कोष्ठीय अभिव्यक्ति का ठीक ऋणात्मक है। फलस्वरूप μ एवं ϑ के ऐसे मूल्य (दोनों गैर- शून्य मात्रायें हों) जो समीकरण $\alpha\mu + \beta\vartheta u = 0$ को संतुष्ट करें हम वैकल्प रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :-

q घनात्मक सुनिश्चित है यदि $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} < 0$

q ऋणात्मक सुनिश्चित है यदि $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} > 0$

आप यहां ध्यान दें कि इस कसौटी पर जिस सारणीक का प्रयोग किया गया है, वह अन्य कुछ नहीं बल्कि मूल द्वि-घातीय रूप $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ का सारणीक है, जिसके साथ एक बोर्डर ऊपर एवं एक वैसा ही बायीं ओर रख दिया गया है। ये बोर्डर प्रतिबन्ध के दो गुणांकों α एवं β से बने हुये हैं एवं मूल विकीर्ण में एक शून्य है। यह सीमाबद्ध विवेचक सममित है।

जब हम द्विघाती रूप d^2s (समीकरण 12^1) पर लागू करते हैं तो u एवं μ चर क्रमशः dx एवं dy हो जाते है; और विवेचक है सियन (Hessian)

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

से बना है। साथ ही द्विघाती रूप का प्रतिबन्ध $g_x\, dx + g_y dy = 0$ होने से, हमारे पास $\alpha = gx$ एवं $\beta = gy$ है। इस प्रकार, dx एवं dy के वे मूल्य (दोनों शून्य न हों) जो उपरोक्त प्रतिबन्ध को संतुष्ट करते हैं; के लिये हमारे पास द्वितीय कोटि की शर्त के लिये निम्न कसौटी है

d^2s घनात्मक निश्चित है यदि $$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

d^2s ऋणात्मक निश्चित है यदि $$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

दायीं ओर के विवेचक को बोर्डरड-हैसिन कहा जाता है। ओ $|\bar{H}|$ द्वारा बताया जाता है, जहां ऊपर की ओर बार सीमा को इंगित करती है।

इसके आधार पर हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

$s = f\ (x,\ y)$ या $z = f\ (z,y) + \lambda g\ (x,\ y)$

के क्रान्तिक मूल्य दिये हुये होने पर s के सापेक्ष उच्चिष्ठ को निर्धारण करने के लिये $|\bar{H}|$ का घनात्मक होना पर्याप्त है; इसी प्रकार ऋणात्मक $|\underline{H}|$ इसे निम्निष्ठ निर्धारित करने के लिये पर्याप्त है — बशर्ते कि $|\bar{H}|$ में आने वाले सभी अवकलज का मूल्यांकन x और y के क्रान्तिक मान के आधार पर हों

अभ्यास - 12

निम्न फलन का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये और बताइये कि यह उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ?

$s = xy$ प्रतिबन्ध $x + y - 4 = 0$

सबसे पहले हम उपरोक्त फलन का संवर्धित उद्देश्य फलन लिखते हैं —

$z = xy + \lambda\ (x + y - 4)$

z के क्रान्तिक मूल्य के लिए आवश्यक है कि

$Zx = y + \lambda = 0$
$Zy = x + \lambda = 0$
$Z\lambda = x + y - 4 = 0$

अभ्यास 5 में उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर हमें निम्न मूल्य प्राप्त हुये थे

$\bar{x} = 2,\ \bar{y} = 2,\ \lambda = -4$ एवं $\bar{z} = \bar{s} = 4$

अब हम द्वितीय कोटि की शर्त का परीक्षण करेंगे

$Zxx = 0$, $Zxy = Zyx = 1$ एवं $Zyy = 0$

हमारे द्वारा चाहे गये सीमान्त अवयव $gx = 1$

एवं $gy = 1$ हैं।

इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

इससे प्रमाणित होता है कि $s = 9$ उच्चिष्ठ मूल्य है।

अभ्यास – 13

निम्न फलन का चरम मूल्य ज्ञात करें और जांच करें कि यह निम्निष्ठ या उच्चिष्ठ है?

$$s = x^2 - y^2 + xy + 5x$$

बशर्ते कि $\quad x - 2y = 0$

सर्व प्रथम हम सवर्धित उद्देश्य फलन z लिखते हैं

$$z = x^2 - y^2 + xy + 5x + \lambda\,(x - 2y)$$

z के क्रान्तिक मूल्य के लिये यह आवश्यक है कि

$$\frac{\partial x}{\partial x} = z_x = 2x + y + 5 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -2y + x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = z\lambda = x - 2y = 0$$

अभ्यास – 6 में हम देख चुके हैं कि उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर निम्न क्रान्तिक मूल्य प्राप्त होते हैं।

$\bar{x} = -2$, $\bar{y} = -1$, $\lambda = 0$ एवं $\bar{s} = \bar{z} = 5$

द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज निम्न होंगे

$z\ Zxx = 2$, $Zyy = -2$, $Zxy = Zyx = 1$

$gx = 1\ gy = -2$

इसलिए

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 < 0$$

इससे सिद्ध होता है कि $z = s = -5$ फलन का न्यूनतम मूल्य है।

8.8 सारांश

इस इकाई में हमने अधिकतमीकरण की समस्या का अध्ययन किया है।

हमारे विश्लेषण का मुख्य आधार अवकलन कलन (Differential Calculus) है और विभिन्न क्रमों के अवकलज प्राथमिक उपकरण। प्रथम एवं द्वितीय कोटि की शर्तों के आधार पर हम जिन चरम मूल्यों को ज्ञात करते हैं वे सापेक्ष उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ होते हैं। निर्पेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिये हमें अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता होती है। हमारे विश्लेषण की दूसरी सीमा यह है कि हमने केवल समानता के प्रतिबन्धों पर विचार किया है। अवकलजन कलन द्वारा असमानता के प्रतिबन्धों की स्थिति में अनुकूलतमीकरण की समस्या को हल नहीं किया जा सकता। असमानता (inequality) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अनुकूलतमीकरण की समस्याओं को हल करने की विधियाँ आपको इकाई 16 व 17 में बतायी जावेंगी। इकाई 8 में हम निर्बाधित अनुकूलतमीकरण के अर्थशास्त्र में कुछ सरल प्रयोगों की जानकारी प्राप्त करेंगें।

8.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

E1. फलन $z = xy$ का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये जबकि $2 - x - 2y = 0$ हो। इस बात की जांच कीजिये कि चरम मूल्य उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ।

E2. फलन $s = x_1^2 + x_2^2$ का चरम मूल्य ज्ञात कीजिये जबकि $x_1 + 4x_2 - 2 = 0$ हो। इस बात की जांच कीजिये कि प्राप्त चरम मूल्य फलन का अधिकतम या न्यूनतमक मूल्य है।

E3. फलन $U = x^2 - y^2 + xy + 5x$ के चरम मूल्य ज्ञात कीजिये जबकि $x - 2y = 0$ हो।

E4. फलन $U = 2x^2 - 6y^2$ का, प्रतिबन्ध $x + 2y = 4$ होने पर, न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिये U का क्या मूल्य होगा?

E5. फलन $z = 5x^2 + 6y^2 - xy$ का, प्रतिबन्ध $x + 2y = 24$ होने पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ ज्ञात कीजिये।

E6. फलन $s = 12xy - 3y^2 - x^2$ का प्रतिबन्ध $x + y = 16$ होने पर उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ ज्ञात कीजिये।

E7. फलन $z = x^2 - 10y^2$, प्रतिबंध $x - y = 18$ होने पर उच्चिष्ठ ज्ञात कीजिये।

8.10 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर

E1. $\bar{x} = 1,$	$\bar{Y} = y_2$	$\bar{\lambda} = y_2,$	$\bar{Z} = 1$ न्यूनतम
E2. $x_1 = y_5,$	$x_2 = 4/5,$	$\lambda = -2/5$	$Z = \frac{17}{25}$ न्यूनतम
E.3 $\bar{x} = 2,$	$\bar{y} = 1,$	$\bar{\lambda} = -10,$	$\bar{Z} = 15$ न्यूनतम
E4. $\bar{x} = -12,$	$\bar{y} = 8,$	$\bar{\lambda} = 48$	$\bar{U} = -96$ न्यूनतम
E5. $\bar{x} = 6,$	$\bar{y} = 9,$	$\bar{\lambda} = 51$	$\bar{Z} - 360$ न्यूनतम
E6. $\bar{x} = 9,$	$\bar{y} = 7,$	$\bar{\lambda} = 66$	$\bar{s} = 528$ अधिकतम
E.7 $\bar{x} = 20,$	$\bar{y} = 2$	$\bar{\lambda} = 40$	$\bar{Z} = 360$ अधिकतम

8.11 शब्दावली

अनुकूलतमीकरण	Optimisation
अधिकतमीकरण	Maximisation
न्यूनतमीकरण	Minimisation
उच्चिष्ट	Maxima
निम्निष्ठ	Minima
प्रतिबन्धित/निर्बाधित	Constrained
विकल्प चर	Choice Variable
क्रान्तिक मूल्य	Critical Value
गुणांक	Multiplier
सारणिक	Determinant

8.12 संदर्भ ग्रंथ

1. Chiang, Alpha. C., Fundamental method of mathematical economics., Mc Graw - Hill, 1984. Chapter 12

2. Weber, Jean E., Mathematical Analysis — Business and Economic Applications, Harper, 1982 Chapters 3 and 8

3. Mehta & Mudnani, Mathematics for economists, Sultan Chand & Sons, 198, Chapter 6.

4. G. S. Monga, Mathematics and statistics for ecnomists, Vikas, Delhi

इकाई - 9

अनुकूलतमीकरण की धारणा के अर्थशास्त्र में सरल प्रयोग

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप जान सकेंगे कि:

1. प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की धारणा का अर्थशास्त्र में क्या महत्त्व है;
2. अनुकूलतमीकरण की विधियों का सरल आर्थिक समस्याओं को हल करने में प्रयोग की विभिन्न रीतियाँ कौन-कौन सी हैं;

9.1 प्रस्तावना

आप इस पाठ्यक्रम के प्रथम खण्ड में अवकलन, आंशिक अवकलन, उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की धारणा और अर्थशास्त्र में इनके प्रयोग की जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। इकाई 8 में आपको प्रतिबन्धरहित एवं प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की धारणा और ऐसी समस्याओं में क्रान्तिक मूल्य ज्ञात करने की संक्रियाओं को बताया गया है। अर्थशास्त्र में हमारे समक्ष अनुकूलतमीकरण की जो समस्याएं आती हैं उनमें से बहुत सी प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की होती हैं। अब तक आपने जो संक्रियायें सीखी हैं उनका उपयोग व्यष्टि आर्थिक विश्लेषण में उपभोक्ता के व्यवहार के सिद्धान्तों उत्पादक के व्यवहार के सिद्धान्तों, उत्पादक के व्यवहार के अध्ययन और बाजार संतुलन के सिद्धांतों में कर सकते हैं।

पिछली इकाई में आप पढ़ चुके हैं कि निर्धारित कसौटी के आधार पर उपलब्ध विकल्पों में से सर्वश्रेष्ठ का चुनाव ही अनुकूलतमीकरण की समस्या है। जब हम अनुकूलतमीकरण की समस्या में उपस्थित परिसीमन घटकों को ध्यान में रखकर क्रान्तिक मूल्य ज्ञात करते हैं तो यह प्रतिंबधित अनूकूलतमीकरण की समस्या होती है। जैसे बजट प्रतिबन्ध के अन्तर्गत एक उपभोक्ता को अधिकतम संतुष्टि प्रदान करने वाली विभिन्न वस्तुओं की मात्राओं का निर्धारण, निर्धारित उत्पादन स्तर के लिए उत्पादन लागत को न्यूनतम करने वाले साधन संयोग का निर्धारण आदि।

प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की समस्या में क्रान्तिक मूल्य (विकल्प चरों के वे मूल्य जिनसे उद्देश्य फलन का वांछित चरम मूल्य प्राप्त हो सके) ज्ञात करने हेतु परिस्थिति अनुसार निम्न तीन विधियों में से किसी एक का उपयोग किया जाता है

1. प्रतिस्थापन रीति
2. लैग्रेज रीति
3. सकल अवकलन रीति

इन रीतियों के बारे में आपको इकाई 8 में विस्तार से बताया जा चुका है। अब हम आर्थिक समस्याओं में इनका प्रयोग करके उपलब्ध विकल्पों में से सर्वश्रेष्ठ का चुनाव करने की प्रक्रिया को देखेंगे।

9.2 अर्थशास्त्र में प्रयोग

9.2.1 उपभोक्ता के व्यवहार का सिद्धांत

(उपभोक्ता द्वारा उपयोगिता का अधिकतमीकरण) प्रत्येक उपभोक्ता जो विवेकपूर्ण व्यवहार करता है अपनी निर्दिष्ट आय के द्वारा अधिकतम उपयोगिता प्राप्त करने का प्रयत्न करता है। माना कि एक उपभोक्ता दो वस्तुओं Q_1 एवं Q_2 की सीमित मात्रा क्रय कर सकता है, जो इन दो वस्तुओं पर व्यय करने हेतु निर्धारित आय (धनराशि) पर निर्भर है। वह यह भी चाहता है कि क्रय की जाने वाली वस्तुओं का ऐसा संयोग चुना जावे जिससे व्यय की गई धनराशि से अधिकतम उपयोगिता मिले। यदि Q_1 एवं Q_2 पर व्यय की जाने वाली धनराशि को y मानें एवं दोनों वस्तुओं की कीमतों को क्रमशः p_1 एवं p_2 लें तो उपभोक्ता के उपयोगिता फलन को अधिकतमीकरण के उद्देश्य से निम्नानुसार व्यक्त किया जा जायेगाः

$U = f(q_1, q_2)$ .. (9.1)

आय प्रतिबन्ध : $Y = p_1q_1 + p_2q_2$ ... (9.2)

हमारी समस्या उपभोक्ता के उपयोगिता फलन (9.1) को आय प्रतिबन्ध (9.2) के अन्तर्गत अधिकतमीकरण की होगी।

अभ्यास - 1 ज्ञात है :

उपयोगिता	$U = q_1q_2$
प्रथम वस्तु Q_1 का मूल्य	$p_1 = 4$ रु.
द्वितीय वस्तु Q_2 का मूल्य	$p_2 = 10$ रु.
उपभोक्ता की आय	$y = 100$ रु.

वस्तु Q_1 एवं Q_2 का उपभोग का संतुलित स्तर बताओ तथा अधिकतमीकरण की शर्तों की पुष्टि करो।

हल :-

यहां उद्देश्य फलन	$U = f(q_1, q_2)$ है
बजट प्रतिबंध	$Y = p_1q_1 + p_2q_2$
अथवा	$100 = 4q_1 + 10q_2$

यहां बजट प्रतिबन्ध समीकरण को उद्देश्य फलन में प्रतिस्थापित किया जा सकता है। अंतः प्रतिस्थापन रीति काम में ली जाएगी। बजट प्रतिबन्ध से निम्न समीकरण प्राप्त होता है:

$$4q_1 + 10q_2 = 100$$

$$10q_2 = 100 - 4q_1$$

$$q_2 = 10 - \frac{2}{5}q_1$$

U_2 फलन q_2 का मान रखने पर

$$U = q_1 \left(10 - \frac{2}{5} q_1\right)$$

$$U = 10q_1 - \frac{2}{5} q_1^2$$

अधिकतमीकरण के लिए $\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$ एवं $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0$ की शर्तें पूरी होनी चाहिए।

अतः उपयोगिता फलन U का आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 10 - \frac{4}{5} q_1 = 0$$

$q_1 = \frac{5}{4} \times 10 = \frac{25}{2}$ एवं q_1 का मान रखने पर

$$q_2 = 10 - \frac{2}{5} \times \frac{25}{2} = 5$$

द्वितीय आंशिक अवकलज ज्ञात करने पर

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = \frac{-4}{5} < 0$$

द्वितीय आंशिक अवकलज — 4/5 है। यह शून्य से कम है अतः दोनों शर्तें पूरी होती हैं।

$q_1 = \frac{25}{2}$ एवं $q_2 = 5$ पर दी हुई आय से उपभोक्ता की संतुष्टि का स्तर दिए हुए प्रतिबन्धों के अनुरूप अधिकतम होगा।

अभ्यास - 2 दिया हुआ है -

उपयोगिता फलन $U = q_1q_2^2 - 10q_1$

$p_1 = 2$

$p_2 = 8$

$y = 116$

उपभोक्ता का संतुलन ज्ञात करो।

180

हलः-

उद्देश्य फलन $U = q_1 q_2^2 - 10 q_1$

बजट प्रतिबन्ध $2q_1 + 8q_2 = 116$

अथवा

$2q_1 + 8q_2 - 116 = 0$

अथवा $2q_1 = 116 - 8q_2$

$q_1 = 58 - 4q_2$

अतः $U = (58 - 4q_2) q_2^2 - 10 (58 - 4q_2)$

$= 58q_2^2 - 4q_2^3 - 580 + 40 q_2$

$\therefore \quad \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = 116 q_2 - 12q_2^2 + 40$

उपयोगिता फलन के प्रथम अवकलज को शून्य के बराबर रखने पर

$116 q_2 - 12q_2^2 + 40 = 0$

अथवा

$12q_2^2 - 116q_2 - 40 = 0$

समीकरण में 4 का भाग देने पर

$3q_2^2 - 29q_2 - 10 = 0$

$3q_2^2 + q_2 - 30 q_2 - 10 = 0$

$q_2 (3q_2 + 1) - 10 (3q_2 + 1) = 0$

$(3q_2 + 1) (q_2 - 10) = 0$

$q_2 = -\dfrac{1}{3}$ & 10

चूंकि मात्रा घनात्मक होगी अतः $q_2 = 10$ ही सही मूल्य है। बजट प्रतिबन्ध में $q_2 = 10$ प्रतिस्थापित करने पर $q_1 = 18$ द्वितीय कोटि की शर्त के लिए

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} = 116 - 24q_2$

$q_2 = 10$ होने पर

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} = 116 - 240$

$= - 124$ यह शून्य से कम है

अतः दिये हुये बजट प्रतिबन्ध में q_1 की 18 इकाईयाँ और q_2 की 10 इकाईयाँ क्रय करके उपभोक्ता अधिकतम उपयोगिता प्राप्त करेगा।

यहां उपभोक्ता संतुलन के लिए उपयोगिता विश्लेषण की शर्त पूरी होती है।

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1 = q_2^2 - 10$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = f_2 = 2q_1q_2$$

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{q_2^2 - 10}{2q_1q_2} = \frac{90}{360} = \frac{2}{8} = \frac{p_1}{p_2}$$

बोध प्रश्न

1. यदि उपयोगिता फलन $U = q_1 q_2$ है जहाँ q_1 एवं q_2 क्रमशः दो वस्तुओं Q_1 एवं Q_2 की मात्राएं हैं। Q_1 एवं Q_2 की कीमतें क्रमशः 2 रु. एवं 5रु. है। उपभोक्ता की आय 100 रु. है। वस्तुओं की वह मात्रा ज्ञात करो जिस पर दिये हुये प्रतिबन्ध के अन्तर्गत उपभोक्ता की संतुष्टि का स्तर अधिकतम हो।

   संकेत उद्देश्य फलन $U = q_1 q_2$

   बजट प्रतिबन्ध $2q_1 + 5q_2 - 100 = 0$

2. उपयोगिता फलन $U = q_1q_2$ तथा प्रतिबन्ध $q_1 + 3q_2 = 100$ द्वारा अधिकतम उपयोगिता हेतु q_1q_2 तथा q_2 का मान ज्ञात कीजिये।

3. यदि उपयोगिता फलन $U = q_1q_2$ है। Q_1 एवं Q_2 वस्तु की कीमतें क्रमशः $p_1 = 15$ एवं $p_2 = 5$ है। उपभोक्ता की आय प्रतिबन्ध 150 रु० है। अधिकतम उपयोगिता के लिए Q_1 एवं Q_2 की क्रय की जाने वाली मात्राएं ज्ञात कीजिये।

9.2.2 साधनों का अनुकूलतम संयोग

अब हम प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण का प्रयोग एक फर्म के व्यवहार से सम्बन्धित निर्णय लेने में करेंगे। एक फर्म का उद्देश्य अधिकतम उत्पादन अथवा न्यूनतम लागत पर उत्पादन साधनों का चयन करना है अथवा उत्पादन साधनों के अनुकूलतम संयोग का चुनाव करना है। अनुकूलतम साधन संयोग ज्ञात करने के लिए दो विधियां हैं जो इन्हीं दो उद्देश्यों पर निर्भर है। प्रथम हम उत्पादन अथवा निर्गत अधिकतमीकरण की समस्या का अध्ययन करते हैं, तदुपरान्त लागत न्यूनतमीकरण की समस्या का अध्ययन करेंगे। इन दोनों ही स्थितियों में हमें आगतों (Inputs) का एक ही उचित संयोग प्राप्त होता है।

(अ) प्रतिबन्धित निर्गत अथवा उपज (output) अधिकतमीकरण (Constrained outpût maximisation)

मान लीजिये फर्म का उत्पादन फलन $x = f(L, K)$ है। प्रतिबन्धित निर्गत (output) अधिकतमीकरण के लिए यही उद्देश्य फलन है। इस उद्देश्य फलन में L तथा K क्रमशः श्रम एवं पूंजी की मात्राओं को तथा x उत्पादन अथवा निर्गत को व्यक्त करता है। यदि सम लागत वक्र का समीकरण (प्रतिबन्ध) निम्न है:

$$C = Lp_L + Kp_k$$

तब हमें $c = Lp_L + Kp_k$ के सापेक्ष $x = f(L, k)$ को अधिकतम करना है यहां p_L तथा p_k श्रम तथा पूंजी के बाजार मूल्य हैं तथा C कुल लागत है। लॉगरैज (Lagrange) विधि द्वारा उद्देश्य फलन को अधिकतम करने के लिए सबंधित उद्देश्य फलन होगा:

$$Z = f(L,K) + \lambda (C - Lp_L - Kp_k)$$

यहां λ लॉगरैंज गुंणक (Lagrange Multiplier) है।

L, K तथा λ के सापेक्ष z फलन के आंशिक अवकलनों को शून्य के बराबर रखने पर

$$Z_L = \frac{\partial z}{\partial L} = f_L - \lambda p_L = 0 \text{ ....} \qquad \text{(i)}$$

$$Z_k = \frac{\partial z}{\partial k} = f_k - \lambda p_k = 0 \text{ ....} \qquad \text{(ii)}$$

$$Z_\lambda = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = C - Lp_L - Kp_k = 0 \qquad \text{..... (iii)}$$

f_L तथा f_k उत्पादन फलन के श्रम व पूंजी के सापेक्ष आंशिक अवकलज हैं जो क्रमशः श्रम तथा पूंजी की सीमान्त उत्पादकता के प्रतिनिधि हैं।

समीकरण (iii) प्रतिबन्ध का पुनर्कथन मात्र है।

प्रथम दो समीकरणों (i) एवं (ii) से

$$\frac{f_L}{f_k} = \frac{\lambda p_L}{\lambda p_k} = \frac{p_L}{p_k}$$

अर्थात्

$$\frac{f_L}{p_L} = \frac{f_k}{p_k} = \lambda$$

अर्थात्

$$\frac{Mpp_L}{p_L} = \frac{MPP_k}{p_k}$$

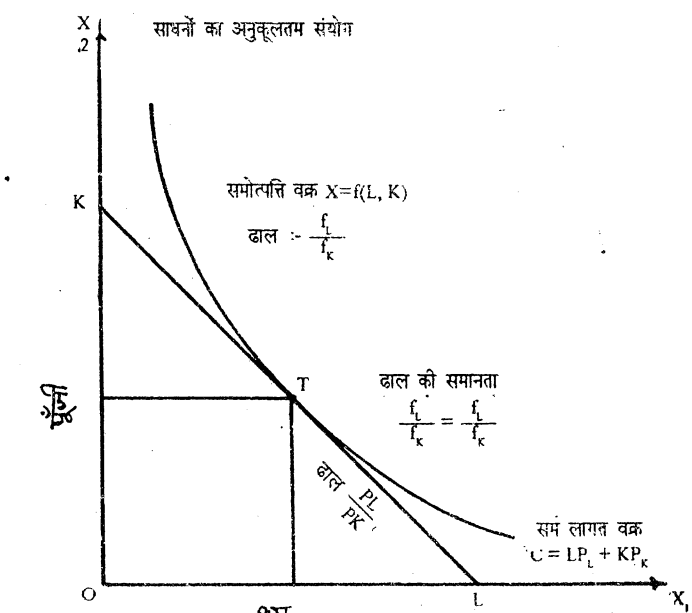
इस प्रकार फर्म का उत्पादन दी हुई कुल लागत पर अधिकतम होगा जब श्रम तथा पूंजी की सीमांत भौतिक उत्पादकता का अनुपात एवं उनके मूल्यों के अनुपात बराबर होंगें। उपर्युक्त परिणामों से यह भी सरलता पूर्वक सिद्ध किया जा सकता है कि संतुलन बिन्दु पर समोत्पति वक्र का ढाल सम लागत वक्र के ढाल के बराबर होता है। जैसा कि चित्र 9 .1 से स्पष्ट है।

समोत्पति वक्र $x = f(LK)$

ढाल $- \frac{f_l}{f_k}$

ढाल की समानता $- \frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L}{P_L}$

सम लागत वक्र $C = LP_L + KP_K$



चित्र : 9.1

साधनों का अनुकूलतम संयोग

चित्र 9.1 में T बिन्दु पर समोत्पत्ति वक्र की ढाल $\frac{f_L}{f_k}$ है।

जो सम लागत रेखा के ढाल p_L / p_K के बराबर है।

यदि श्रम पर एक रूपया व्यय करने से कुल उत्पादन में 5 इकाई की वृद्धि होती है ($Mpp_L = 5$) अर्थात्

$\frac{Mpp_L}{p_L} = 5$ से हमें ज्ञात होता है कि श्रम के लिए प्रत्येक एक रुपया अतिरिक्त व्यय करने पर उत्पादन में 5 इकाई की वृद्धि हो जाती है। इसी प्रकार

$\frac{Mpp_k}{p_k}$ पूंजी पर एक रुपया व्यय करने से प्राप्त निर्गत को सूचित करता है। यदि दोनों असमान हो

$$\frac{Mpp_L}{p_L} = 5 \quad \text{एवं} \quad \frac{Mpp_k}{p_k} = 4$$

तब इसका यह अर्थ होगा कि पूंजी पर एक रूपया व्यय करने के स्थान पर श्रम पर व्यय किया जावे तो निर्गत एक इकाई अधिक होगा। अतएव

$$\frac{Mpp_L}{p_L} \neq \frac{Mpp_k}{p_k}$$

हो तो फर्म हेतु श्रम-पूंजी संयोग अनुकूलतम नहीं हो सकता। फर्म का उत्पादन अधिकतमीकरण उसी अवस्था में हो सकता है, जबकि

$$\frac{MPP_L}{P_L} = \frac{MPP_K}{P_k}$$

की शर्त पूरी हो, तथा इस स्थिति में साधनों का अनुकूलतम संयोग बन सकता है।

अभ्यास - 3

यदि उत्पादन फलन $Q = L^{½} K^{½}$ हैं। K एवं L की प्रति इकाई कीमत क्रमशः 2 रु. एवं 4 रु. एवं कुल लागत 80 रु. होने पर दिये हुये लागत प्रतिबन्ध के अन्तर्गत अधिकतम उत्पादन ज्ञात कीजिये।

हल:-

हम इस प्रश्न के हल के लिए प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करेंगे।

उद्देश्य फलन $Q = L^{½} K^{½}$

प्रतिबन्ध $2K + 4L = 80$

अथवा

$$2K + 4L - 80 = 0$$

अथवा $K = 40 - 2L$

उद्देश्य फलन में K का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$$Q = L^{½} (40 - 2L)^{½}$$

$$= (40L - 2L^2)^{½}$$

उद्देश्य फलन का प्रथम अवकलज

$$\frac{dQ}{dL} = \frac{1}{2}(40L - 2L^2)^{-½}(40 - 4L) = 0$$

यदि $40 - 4L = 0$ $L = 10$ दूसरे ब्रेकट के मूल्य $½(40L - 20L^2)^{-½} = 0$ सम्भव नहीं है क्योंकि ऐसा मानने पर L का मान अनन्त (∞) हो जाता है।

$$½\ (40L - 20L^2)^{-½} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{40L - 20L^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{40L - 20L^2} = \frac{1}{0} = \text{अनन्त}$$

अतः $L = 10$ होने पर $K = 40 - 2\ (10)$

$K = 20$ होगा

$\therefore \quad Q = L^{½} K^{½}$

$\therefore \quad = 10^{½}\ 20^{½}$

$= \sqrt{2x5\ x\ 2x2x5}$

$Q \quad = 2x5\ \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

उत्पादन $10\ \sqrt{2}$ होगा। वह उत्पादन अधिकतम होगा यदि उद्देश्य फलन के द्वितीय अवकलज का मान शून्य से कम (ऋणात्मक) हो।

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{1}{2}\ (40L-2L^2)^{-½}\ (-4)+(40-4L)\ \frac{1}{4}\ (40L-2L^2)^{-½}\ (40-4L)$$

$$= -2\ (40L - 2L^2)^{-½} + \frac{(40 - 4L)^2}{4\ \sqrt{40L - 2L^2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{400 - 200}} + 0$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{200}}$$

द्वितीय क्रम के अवकलन का मान ऋणात्मक है अतः द्वितीय क्रम की शर्त भी पूरी होती है एवं उत्पादन स्तर $10\sqrt{2}$ दिये हुये प्रतिबन्धों की सीमाओं में अधिकतम है। अब हम इसी समस्या को लॉगरैंज गुणक विधि की सहायता से हल करेंगे।

लागरेंज विधि

संवर्धित फलन $Z = L^{1/2} K^{1/2} + \lambda (80 - 2K - 4L)$ L, K तथा λ के z के सापेक्ष आंशिक अवकलनों को शून्य के बराबर रखने पर

$$Z_L = \frac{\partial z}{\partial L} = \frac{1}{2} L^{-1/2} k^{1/2} - 4\lambda = 0 \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$Z_k = \frac{\partial z}{\partial k} = \frac{1}{2} L^{1/2} k^{-1/2} - 2\lambda = 0 \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$Z_\lambda = \frac{\partial x}{\partial x} = 80 - 2K - 4L = 0 \ldots \quad \text{(iii)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} - 4\lambda = 0 \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करने एवं (i) से घटाने परे

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} - 4\lambda = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}$$

अथवा $K = 2L$

समीकरण (iii) में K का मान रखने पर

$80 - 2(2L) - 4L = 0$

$-8L = -80$

$L = 10 \qquad \therefore K = 10 \times 2 = 20$

$$2\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}$$

$$2\lambda = \frac{10}{2\sqrt{20}} \text{ or } 2\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{or} \quad \lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

अतः जब L = 10, K = 20 है, उत्पादन अधिकतम होगा इस तथ्य की जांच करने हेतु हमें हेस के सीमारेखाबद्ध सारणिक (Bordered Hassion determinant) का मान देखना होगा। यह मान घनात्मक होने पर ज्ञात बिन्दु (मूल्य) उच्चिष्ठ मूल्य को प्रदर्शित करेगा एवं इसके विपरीत ऋणात्मक होने पर निम्निष्ठ मूल्य बताएगा सीमारेखाबद्ध वह हेस के सारणिक का स्वरूप ऐसा होगा :

$$\begin{vmatrix} 0 & gx & gy \\ g_x & zq_1q_1 & zq_2q_1 \\ g_y & zq_2q_1 & zq_2q_1 \end{vmatrix}$$

प्रस्तुत उदाहरण में

g_x or $g_L = 2$ एव g_y or $g_K = 4$ है यह क्रमशः प्रतिबन्धा फलन में L एवं K के गुणापंक हैं।

$$zq_1q_2 = z_{LL} = -\frac{\sqrt{5}}{20} \quad zq_2q_1 = z_{KL} = \frac{1}{40\sqrt{2}}$$

$$zq_2q_2 = z_{KK} = \frac{-10}{80}$$ मूल्य सारणिक में रखने पर

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & \frac{-\sqrt{5}}{20} & \frac{1}{40\sqrt{2}} \\ 4 & \frac{1}{40\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{80} \end{vmatrix} > 0$$

सारणिक का मान शून्य से अधिक घनात्मक है, अतः (10, 20) पर उद्देश्य फलन का उच्चिष्ठ होगा अर्थात् उत्पादन अधिकतम होगा।

$$Q = L^{1/2} \; K^{1/2}$$

$$\begin{aligned} Q &= 10^{1/2} \cdot 20^{1/2} \\ &= \sqrt{10} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5} \\ &= 2 \times 5 \sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ब) **प्रतिबन्धित लागत न्यूनतमीकरण (Constrained Cost Minimisation)**

यदि फर्म का उद्देश्य उत्पादन का स्तर होने की दशा में लागत का न्यूनतमीकरण है तो उद्देश्य फलन का गणितीय रूप होगा:

$$C = LP_L + KP_K$$

उत्पादन स्तर प्रतिबन्ध होगा

$q_0 = f\ (L, K)$

जहाँ L एवं K इन्पुट श्रम एवं पूंजी की मात्राएं हैं एवं P_L एवं P_K क्रमशः श्रम एवं पूंजी की कीमतें हैं। q_0 उत्पादन का स्तर है।

लॉगरैंज गुणक λ का प्रयोग करने पर संवर्धित उद्देश्य फलन होगा

$z = C + \lambda\ [q_0 - f\ (L, K)]$

अथवा

$z = LP_L + KP_K + \lambda\ [q_0 - f\ (L, K)]$

L, K एवं λ के सापेक्ष z के आंशिक अवकलनों को शून्य के बराबर रखने पर

$$\frac{\partial z}{\partial L} = P_L - \lambda\ f_L = 0 \ \ldots\ldots \qquad (i)$$

$$\frac{\partial z}{\partial k} = P_K - \lambda\ f_K = 0 \ \ldots\ldots \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = q_0 - f\ (L, K) = 0 \ \ldots \qquad (iii)$$

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{p_L}{p_K} \quad \text{अथवा} \quad \frac{p_L}{f_L} = \frac{p_K}{f_K} = \lambda$$

उपर्युक्त समीकरण का अर्थ है कि फर्म की लागत उस बिन्दु पर न्यूनतम होगी जहां श्रम एवं पूंजी का सीमान्त उत्पादन उनकी कीमतों के अनुपात के बराबर हो। यहां यह ध्यान रहे कि उत्पादन फलन f (L, K) के आंशिक अवकलज दोनों साधनों की सीमान्त उत्पादकता है। इस उदाहरण में λ उत्पादन की सीमान्त लागत को बता सकता है। साधन की कीमत में उसकी सीमान्त भौतिक उत्पादकता

$$\left(\frac{\partial q}{\partial L}, \quad \frac{\partial q}{\partial k}\right)$$

का भाग देने पर सीमान्त लागत प्राप्त होती है। इस बात को इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि उपर्युक्त समीकरण उत्पादन स्तर स्थिर होने पर प्रत्येक साधन के उपयोग पर सीमान्त लागत को बराबर करता है।

$$\frac{p_L}{p_K} = \frac{f_L}{f_K}$$

के रूप में यह स्पष्टीकरण बताता है कि संतुलन की प्रथम शर्त है कि साधन श्रम एवं पूंजी के मध्य तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमान्त दर

$MRTS = \dfrac{MPP_L}{MPP_K}$ उनकी कीमतों के अनुपात बराबर हों अथवा न्यूनतम लागत संयोग के लिए दो साधनों का कीमत अनुपात उनकी सीमान्त उत्पादकता के अनुपात के बराबर हो अर्थात्

$MRTS_{LK} = \dfrac{p_L}{P_K}$ इन्पुट की संख्या अधिक होने पर सभी साधनों के लिए यह शर्त यथावत् रहेगी अर्थात् :

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \frac{f_3}{p_3} = \ldots\ldots \frac{f_n}{p_n}$$

यहाँ f_1, f_2 ---- f_n n इन्पुट की सीमान्त उत्पादकता तथा p_1, p_2 ------ p_n उनकी कीमतें हैं।

प्रथम शर्त से निम्निष्ठ बिन्दु का भरोसा नहीं होता अतः द्वितीय शर्त सीमारेखाबद्ध हैसयन सारणिक का मान ऋणात्मक होना चाहिए।

$$H = \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

अभ्यास – 4 एक कारखाना दो प्रकार की मशीने x एव y मात्रा में निर्माण करता है। संयुक्त लागत फलन निम्न है –

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

यदि कारखानें में कुल 8 मशीनें बनाई जानी हों तो लागत न्यूनतम करने हेतु हर प्रकार की कितनी मशीने बनाई जानी चाहिए।

हलः-

उद्देश्य फलन $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$

प्रतिबन्ध $x + y = 8$

लागरैंज गुणांक का उपयोग करने पर संवर्धित उद्देश्य फलन होगाः

$z(x, y\ \lambda) = x^2 + 2y^2 - xy - \lambda(x+y-8)$ # x, y एवं λ के सापेक्ष z के प्रथम आंशिक अवकलज शून्य के बराबर रखने पर :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0 \ldots\ldots \quad (i)$$

130

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - x - \lambda = 0 \; ..... \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = -(x + y - 8) = 0 \; .... \quad \text{(iii)}$$

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर $x = 5, y = 3, \lambda = 7$ प्राप्त होते हैं। इस प्रकार प्रथम कोटि की शर्त पूरी होती है। यह ज्ञात करने के लिए कि यह बिन्दु न्यूनतम लागत को ही दर्शाते हैं अधिकतम को नहीं द्वितीय कोटि की शर्त भी पूरी होनी चाहिए।

$$\Delta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x \partial y} \text{ or } f_{xx} \cdot f_{yy} - f^2_{xy} > 0 \; ^*$$

$$= (2)\;(4) - (1)^2 = > > 0$$

अतः 5 एवं 3 फलन f (x y) का प्रतिबन्धित न्यूनतम है।

वैकल्पिक विधि

उद्देश्य फलन $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$

लागत फलन $x + y = 8$

अथवा $y = 8 - x$

$$z(x) = x^2 + 2(8 - x)^2 - x(8 - x)$$

$$= x^2 + 128 - 32x + 2x^2 - 8x + x^2$$

$$= 4x^2 - 40x + 128$$

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 40 = 0$$

$$x = 5 \;\&\; y = 3$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 8$$

अतः 5, 3 फलन f (x, y) का प्रतिबन्धित न्यूनतम है।

---

* याद रहे $f_{xx} f_{yy} - f_{xy} > 0 \Rightarrow$ उच्चिष्ठ यदि $f_{xx} < 0$ एवं $f_{yy} < 0$

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} \leq 0$ निम्निष्ठ यदि $f_{xx} > 0$ एवं $f_{yy} > 0$

बोध प्रश्न 2

(1) उत्पादन फलन $q = 10L^{½} K^{½}$ एवं बजट प्रतिबन्ध 100 — 3L — 5k — 100 = 0 होने पर उत्पादन को अधिकतम करने के लिए L एवं K के मूल्य ज्ञात कीजिए।

(2) उत्पादन P_1 x एवं y दो इंन्पुटों का फलन है, जो इस प्रकार है $P = x^2 + 5xy - 4y^2$ यदि 2x + 3y = > 4 हो तो x एवं y इन्पुटों की उत्पादन को अधिकतम करने वाली मात्राएं ज्ञात कीजिए।

(3) उत्पादन लागत उत्पादित की जाने वाली वस्तुओं x एवं y का फलन है। लागत फलन $C = 6x^2 + 3y^2$ है। दोनों वस्तुओं का कुल उत्पादन 18 प्राप्त करने के लिए दो वस्तुओं की उत्पादन मात्रा का न्यूनतम लागत संयोग बताइये।

9.2.3 लाभ अधिकतमीकरण

फर्म का उद्देश्य अधिकतम लाभ कमाना होता है। लाभ कुल आगम व कुल लागत का अन्तर होता है। कुल आगम (R) व कुल लागत (c) दोनों उत्पादन माना (Q) के फलन होते हैं। अतः लाभ फलन को Q के फलन के रूप में निम्न रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

$$\Pi = \Pi\ (Q) = R\ (Q) - C(Q)$$

लाभ अधिकतमीकरण की समस्या में लाभ फलन उद्देश्य फलन होता है।

अभ्यास 5 एक फर्म का उत्पादन फलन q = 12 — 1/LK (L+K) है। श्रम, पूंजी एवं उत्पाद की प्रति इकाई कीमत क्रमशः 1, 4 व 9 रु. है। पूंजी, श्रम एवं उत्पादन का अधिकत्तम लाभ प्रदान करने वाला संयोग बताइये।

हल—

कुल लागत फलन = C = L + 4 K   L = श्रम की इकाइयां
कुल आगम फलन = 9q   K = पूंजी की इकाइयां
q = उत्पादन मात्रा

लाभ फलन (TR — TC)

$$\Pi = 9q - L - 4K$$

अथवा = 9{12 — 1/LK (L+K)} — L+4K

संवधित उद्देश्य फलन

$$Z = 9q - L - 4K + \lambda\ [q-12+ \frac{1}{LK}\ (L + K)]$$

182

प्रथम कोटि की शर्तें

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = 9 + \lambda = O \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -1 - \lambda\, L^{-2} = O \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = -4 - \lambda\, K^{-2} = O \qquad \text{(iii)}$$

$\because\ g + \lambda = O$

$\lambda = -g$

समीकरण (ii) में λ का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{9}{L^2} = 1$$

$L^2 = 9$

$L = 3$

समीकरण (iii) में λ का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{9}{K^2} = 4$$

$$K^2 = \frac{9}{4}$$

$$K = \frac{3}{2}$$

अतः $q = 12 - \dfrac{1}{\frac{3x3}{2}}\left(3 + \dfrac{3}{2}\right) = 12 - \dfrac{2}{9} \times \dfrac{9}{2}$

$= 11$

$\Pi = 9q - L - 4K$

अर्थात $\Pi = 9 \times 11 - 3 - \dfrac{(4x3)}{2}$

$= 99 - 9$

$= 90$

द्वितीय कोटि की शर्त की जांच है सीमा रेख बद्ध हैसयन सारणिक (Bordered Hessian Determinant) के द्वारा की जावेगी—

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ g_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_1| = O,\quad |\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\quad |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\bar{H}_4| < O$$

चूंकि द्वितीय एवं चतुर्थ प्रमुख माइनर (Principal Minor) का मान शून्य से कम एवं तृतीय प्रमुख माइनर का मान शून्य से अधिक है अतः d^2Z शून्य से कम होना अतः L=3 व K=3/2 पर चरम मूल्य अधिकतम होगा।

प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण में * संवर्धित्त उद्देश्य फलन मे चारों की संख्या दो से अधिक होने पर द्वितीय कोटी की जाँच हैसियन बॉर्डर्ड सारणिक के प्रमुख माइनर के चिह्न के आधार पर की जाती है। x चर होने पर हैसियन सारणिक का निम्न रूप होगा

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} O & g_1 & g_2 & \dots\dots g_n \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & \dots\dots Z_{1n} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & \dots\dots Z_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ g_n & Z_{n1} & Z_{n2} & \dots\dots Z_{nn} \end{vmatrix}$$

इस सारणिक के प्रमुख माइनर निम्न प्रकार से प्रिभाषित किये जा सकते हैं:-

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} O & g_1 & g_2 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \quad |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} O & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ g_3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}$$

एवं अन्तिम होगा $|\bar{H}_n| = |\bar{H}|$

यहां भी H पर क्षैतिज बार (Horizontal bar) बॉर्डेरर्ड को इंगित करती है। पादांक (sub script) प्रमुख माइनर के क्रम को बताते हैं। जैसे $|\bar{H}_2|$, O, g_1, g_2 से बॉर्डेरर्ड हैसियन के द्वितीय प्रमुख माइनर को बताता है।

इस स्थिति में सापेक्ष परम मूल्य की जाँच निम्न आधारों पर की जावेगा।

शर्त	उच्चिष्ठ	निम्निष्ठ
प्रथम कोटि की आवश्यक शर्त	$Z_\lambda=Z_1=Z_2=\ldots=Z_n=0$	$Z_\lambda=Z_1=Z_2=\ldots=Z_n=0$
द्वितीय कोटि की पर्याप्त शर्त	$\lvert\bar{H}_2\rvert>0; \lvert\bar{H}_3\rvert<0$ $\lvert\bar{H}_4\rvert>0\ldots\ldots(-1)^n\lvert\bar{H}_n\rvert>0$	$\lvert\bar{H}_2\rvert, \lvert\bar{H}_4\rvert, \ldots \lvert\bar{H}_n\rvert<0$

प्रथम कोटि की शर्त पूरी होने पर

अभ्यास - 6

उत्पादन फलन $16Z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2$ है

और इन्पुट x और y की प्रति इकाई कीमत क्रमशः 8 रु व 4 रु है। उत्पादन की प्रति इकाई कीमत रु 32 है। x और y साधन का अधिकतम लाभ प्रदान करने वाला संयोग ज्ञात कीजिए अतः

हल – उत्पादन फलन को प्रतिबन्ध मानते हुए कुल आगम फलन को उच्चिष्ठ (Maxima) अधिकतम लाभ प्रदान करने वाला साधन संयोग बतावेगा। अतः

उद्देश्य फलन : $R = 32z - 8x - 4y$

प्रतिबन्ध : $16z - 65 + 2(x-5)^2 + 4(y-4)^2 = 0$

संवर्धित उद्देश्य फलन

$$F(x,y,z,\lambda) = 32z - 8x - 4y - \lambda\,[16z - 65 + 2(x-5)^2 + 4(y-4)^2]$$

प्रथम कोटि की शर्तें—

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = 32 - 16\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -8 - 4(x-5)\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4 - 8\lambda(y-4) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = 2,\ x = 4,\ y = \frac{15}{4}$$

द्वितीय कोटि की शर्त के आधार पर जाँच हैसियन सारणिक से की जावेगी:—

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 16 & -4 & -2 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} |\bar{H}_2| &= -256 \\ |H_3| &= 1024 \\ |H_4| &= -18384 \end{aligned}$$

अतः $d^2z < 0$ शून्य से कम होगा $|x=4,\ y=\frac{15}{4}$ पर

अधिकतम कुल आगम प्राप्त होगी अर्थात् कुछ लाभ अधिकतम होगा।

अभ्यास 7 — बिक्री S एवं विज्ञापन माध्यम पर व्यय की गई धन राशि x और y में सम्बन्ध निम्न फलन के अनुसार है—

$$S = \frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}$$

शुद्ध लाभ बिक्री का 1/5 में से विज्ञापन की लागत घटाने पर शेष रही राशि है। विज्ञापन का बजट रु 25 होने पर बताइए कि इस राशि को दोनों माध्यमों के मध्य किस प्रकार आवंटित किया जाए कि लाभ अधिकतम हो।

हल—

प्रतिबंध $= x + y = 25$

उद्देश्य फलन $\pi = \frac{1}{5}\left[\frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}\right] - x - y$

संवर्धित उद्देश्य फलन —

$$F(x,y,\lambda) = \frac{1}{5}\left[\frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}\right] - x - y - \lambda(x+y-25)$$

x, y, λ के सापेक्ष प्रथम आंशिक अवकलज

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{40(5+x)-40x}{(5+x)^2} - 1 - \lambda = \frac{200}{(5+x)^2} - 1 - \lambda \quad (a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{20(10+y)-20y}{(10+y)^2} - 1 - \lambda = \frac{200}{(10+y)^2} - 1 - \lambda \quad (b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x+y-25) \quad (c)$$

समीकरण a, b व c को शून्य के बराबर रखकर हल करने पर (प्रथम कोटि की शर्त) निम्न मूल्य प्राप्त होते हैं— $x = 15$, $y = 10$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

(a) $\frac{200}{(5+x)^2} - 1 - \lambda = 0$ अर्थात् $\frac{200}{(5+x)^2} = 1 + \lambda$

(b) $\frac{200}{(10+y)^2} - 1 - \lambda = 0$ अर्थात् $\frac{200}{(10+y)^2} = 1 + \lambda$

(c) $-(x+y-25) = 0$ अर्थात् $-x-y+25 = 0$ या $x+y = 25$

(a) में (b) का भाग देने पर

$$\frac{200}{(5+x)^2} \times \frac{(10+y)^2}{200} = \frac{1+\lambda}{1+\lambda}$$

अथवा $(5+x)^2 = (10+y)^2$

$5 + x = 10 + y$

$x - y = 5$

चूंकि (i) $x - y = 5$

(ii) $x + y = 25$ है अतः $\bar{x} = 15$, $\bar{y} = 10$

समीकरण (a) में $\bar{x} = 15$ रखने पर $\lambda = -\frac{1}{2}$

द्वितीय कोटि की शर्त—

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 200(-2)(5+x)^{-3} = \frac{-400}{(5+x)^3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 200\ (-2)\ (10+y)^{-3} = \frac{-400}{(10+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\ \partial y} = 0$$

चूंकि $x \geq 0$ एवं $y \geq 0$

$$\Delta = \left(\frac{-400}{(5+x)^3}\right) \qquad \left(\frac{-400}{(10+y)^3}\right) - 0 > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} < 0 \quad \text{एवं} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

अतः (15, 10) फलन f (x, y) का प्रतिबन्धित अधिकतम है। दोनों विज्ञापन माध्यमों पर क्रमशः 15 व 10 रुपये कम करने पर अधिकतम लाभ प्राप्त होगा।

बोध प्रश्न 3

1. लागरैंज गुणक का उपयोग करते हुए अधिकतम लाभ निर्धारित कीजिए जबकि उत्पादन फलन $z = 20 - x^2 + 10^x - 2y^2 + 5y$ हो और x साधन, y साधन और उत्पादन की प्रति इकाई कीमत क्रमशः 2 रु., 1 रु. एवं 5 रु. हो।

2. एक फर्म का उत्पादन फलन $Q = 5L^{0.7}\ K^{0.3}$ है। श्रम एवं पूँजी की प्रतिइकाई कीमत क्रमशः 1 रु. एवं 2 रु. है। 20 इकाई उत्पादन स्तर के लिए अधिकतम लाभ प्रदान करने वाला साधन संयोग ज्ञात कीजिए।

3. एक पूर्ण प्रतियोगी फर्म का माँग एवं कुल लागत फलन निम्नानुसार है:

   $P = 32 - x$ एवं

   $C = X^2 + 8x + 4$

   वह उत्पादन स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर लाभ अधिकतम होगा। सम्बन्धित कीमत कुल लाभ एवं कुल आगम ज्ञात कीजिए।

9.3 सारांश

इस इकाई में हमने प्रतिबन्धित अनुकूलतमीकरण की विधियों का उपयोग उपयोगिता अधिकतमीकरण, उत्पादन अधिकतमीकरण, लाभ अधिकतमीकरण की सरल समस्याओं को हल करने में किया है। हमने केवल समानता के प्रतिबन्धों की स्थिति को देखा है। असमानता के प्रतिबन्धों की स्थिति में इन समस्याओं को हल करने की विधियों का ज्ञान रेखिक प्रोगामिक की विषय वस्तु है।

9.4 शब्दावली

अनुकूलतमीकरण	Optimisation
अधिकतमीकरण	Maximization
न्यूनतमीकरण	Minimization
उच्चिष्ठ	Mamima
निम्निष्ठ	Minima
चरम मूल्य	extreme value
अ-शून्य	Non-Zero
निर्गत (उत्पाद)	Output
आगत (इन्पुट)	Input
प्रतिबन्धित/निर्बाधित	Constrained
सर्वसम	Indentical

9.5 प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

(1) $\bar{q}_1 = 25$ $\bar{q}_2 = 10$ $\bar{U} = 250$ $\bar{\lambda} = -5$

(2) $\bar{U} = 250$ $\bar{\lambda} = -50/3$ $\bar{q}_1 = 50$ $\bar{q}_2 = 50/3$

(3) $\bar{q}_1 = 5$ $\bar{q}_2 = 15$

बोध प्रश्न 2

(1) $\bar{L} = 150$ $\bar{K} = 90$

(2) $\bar{X} = 31$ $\bar{Y} = 4$

(3) $\bar{X} = 6$ $\bar{Y} = 12$

बोध प्रश्न 3

(1) $\bar{X} = 24/5,\ \bar{Y} = 6/5\ P_{max} = 229\ 3/5$

(2) $\bar{L} = 4\ (4.6)^{0.3},\ K = 0.86\ (4.6)^{0.3}$

(3) $\bar{P} = 26,\ \bar{R} = 156,\ \Pi = 68$

9.6 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Jean E. Weber, Mathematical Analysis Business and Economics Applications. Harper and Row, 1982 Chapter 3 & 8

2. A.C. Chiang, Fundamental methods of Mathematical Economics, Mc Graw Hill, 1984. Chapter 12.

3. Mehta and Madnoni, Mathematics for Economics, Sultan Chand & Sons, 1988 Chapter 6 to 9.

इकाई - 10

समाकलन की अवधारणा एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप :

1. समाकलन का अभिप्राय भलिभांति समझ सकेंगे।
2. समाकलन ज्ञात करने संबंधी कुछ मूलभूत नियमों से परिचित हो जाएंगे।
3. एक रेखाचित्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकेंगे।
4. अर्थशास्त्र के क्षेत्र में समाकलन की उपयोगिता से परिचित हो जाऐंगे।
5. आप जान सकेंगे कि सीमान्त-फलन ज्ञात होने पर किस प्रकार समाकलन की विधि से कुल-फलन ज्ञात किया जा सकता है।
6. नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य निकाल सकेंगे एवं उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत को मांप सकेंगे।

10.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम के प्रथम खण्ड की इकाई 4 में आपने अवकलन की क्रिया का विस्तृत विवेचन किया है। अब आप अवकलन ज्ञात करने के सभी सूत्रों से परिचित हो चुके हैं। गणित में फलन के क्षेत्र दूसरा महत्वपूर्ण अध्याय समाकलन (Integral Calculas) है। जिसकी चर्चा प्रस्तुत इकाई में की जाएगी। यह क्रिया अवकलन की क्रिया के ठीक विपरीत होती है। आप जान चुके हैं कि यदि एक गतिशील बिन्दु t समय में s (t) दूरी तय करता है तो इसका चलन वेग (Velocity) अथवा v (t) = s' (t) होगा वस्तुतः यह s (t) का अवकलन है। इंस प्रकार चलन वेग ज्ञात करने के लिए हम s (t) का अवकलन ज्ञात कर लेते हैं। परन्तु कभी-कभी यह भीं सम्भव है कि हम उस गतिशील बिन्दु के चलन वेग v (t) से पूर्व परिचित हो एवं हम उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात करना चाहते हों। कहने का आशय यह है कि हमें फलन s' (t) ज्ञात होता है और हम फलन s (t) ज्ञात करना चाहते हैं। आर्थिक क्षेत्र के उदाहरण द्वारा भीं इसे स्पष्ट किया जा सकता है। जब हम उत्पादन-फलन का अवकलन करते हैं तो हमें सीमान्त फलन ज्ञात हो जाता है। अब यदि किसी फर्म के सीमान्त-फलन का हमें ज्ञान है एवं हम कुल फलन ज्ञात करना चाहते हैं तो हमें समाकलन की क्रिया करनी पड़ेगी।

सक्षेप में अवकलन दिया होने पर फलन ज्ञात करने की क्रिया को समाकलन कहा जाता है। इस क्रिया के परिणामस्वरूप प्राप्त फलन को प्रति अवकलन (Antiderivative) अथवा समाकल कहते हैं। प्रस्तुत इकाई में समाकलन ज्ञात करने के विभिन्न नियमों से आपका परिचय कराया जाएगा। इसके अतिरिक्त निश्चित समाकल द्वारा एक रेखाचित्र अथवा वक्र विधि का भी अध्ययन करेंगे।

अर्थशास्त्र के क्षेत्र में समाकलन की उपयोगिता इस बात से स्पष्ट हो जाती है कि यह उत्पादक एवं उपभोक्ता दोनों के लिए महत्वपूर्ण

है इससे हम सीमान्त फलन से कुल फलन ज्ञात कर सकते हैं जैसे- सीमान्त लागत से कुल लागत, सीमान्त उपयोगिता से कुल उपयोगिता आदि। इसी प्रकार समाज में आय की विषमताओं को मापने के लिए लारेन्ज वक्र के लिए असमानता गुणांक ज्ञात कर सकते हैं। उत्पादक एवं उपभोक्ता की बचतों को माप सकते हैं। अब हम समाकलन के बारे में विस्तृत चर्चा करेंगे।

10.2 समाकलन का अर्थ

मान लीजिए प्रारम्भिक कुल फलन F (x) है एवं इसका प्रथम अवकलन f (x) है तो यह अवकलन की क्रिया हुई। इसी प्रकार f (x) का समाकलन करने पर पुनः F (x) पर जाना समाकलन कहलाएगा। अब यह पता लगाने के लिए कि क्या किसी फलन के प्रथम अवकलन f (x) का समाकल F (x) सही है, हम ऐसे अवकलन को लेते हैं जिसका फलन हमें ज्ञात है। उदाहरणार्थ f (x) = 1/x और हम यह भी जानते हैं कि d/dx (ln x) = 1/x अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि F (x) = ln x होगा इस प्रकार 1/x का समाकल ln x होगा।

परन्तु यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि यह निष्कर्ष एक मात्र सही निष्कर्ष हो ऐसा नहीं है। क्योंकि अन्य फलनों जैसे (ln x) + 3, (ln x) + 8, (ln x) - 5 अथवा ऐसे ही अन्य फलनों के प्रथम अवकलन भी 1/x होंगे। वस्तुतः यदि फलन (ln x) के साथ कोई भी स्थिरांक होगा तो अवकलन 1/x ही होगा अतः 1/x का समाकल करते समय कोई अज्ञात स्थिरांक पुनः जोड़ देते हैं। इस प्रकार 1/x का समाकल (ln x) + c होगा। यहां पर c समाकलन का स्थिरांक है।

यह बात महत्वपूर्ण है कि समाकल के साथ सदैव स्थिरांक जोड़ा जाता है चूंकि इसका मूल्य अनिश्चित होता है इसे अनिश्चित समाकल कहते हैं। इसके अलावा समाकल निश्चित (Definite Integral) भी हो सकता है। इसका मूल्य निश्चित होता है एवं ऊपरी एवं नीचली सीमाओं में समाकलन का मूल्य ज्ञात किया जाता है। पहले हम अनिश्चित समाकल (Indifinite Integral) की चर्चा करेंगे। इसे प्रतीकों में इस प्रकार व्यक्त किया जाएगा।

F (x)   d/dx   F (x) = f (x) (प्रथम अवकलन)

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ समाकलन की क्रिया। समाकलन के लिए $\int f(x)\,dx$ को इस प्रकार पढ़ा जाएगा। $\int$.......... dx

इस प्रतीक का अभिप्राय x के संदर्भ में समाकल से है। यह प्रतीक d/dx का विपरीत है जिसका अभिप्राय x के संदर्भ में अवकलन से है। समाकल का प्रतीक $\int$ एवं dx साथ-साथ लिखे जाते हैं क्योंकि समाकल का प्रतीक समाकल की क्रिया को व्यक्त करता है जबकि dx यह व्यक्त करता है कि समाकलन x चर के संदर्भ में करना है। समाकल्य (Integralnd) का सदैव समाकल प्रतीक ($\int$) एवं समाकल के चर के विशेषक (dx) के बीच रखा जाता है।

10.3 समाकलन के नियम

समाकलन के मूल नियम या प्रारम्भिक संक्रियाएं अवकलन की संक्रियाओं पर ही आधारित होती है इसलिए समाकलन के उत्तम अभ्यास के लिए पहले अवकलन की बहुत अच्छी जानकारी कर लेनी चाहिए।

10.3.1 घात सूत्र (Power Formula) हम समाकल के कुछ सामान्य नियमों की चर्चा करेंगे। इनमें घात सूत्र प्रथम है। इससे x के घातांक -1 के अतिरिक्त कुछ भी होने पर समाकल ज्ञात किया जा सकता है।

घात सूत्र के आधार पर x^n का समाकल, जहां $n \neq -1$ (n राशि —1 के बराबर न हो)

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

जैसे

(i) $$\int x^5\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C \quad (n = 5)$$

(ii) $$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C \quad (n = -2)$$

or $$\frac{-1}{x} + C$$

(iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int t^{-1/2}\, dt$$

$$\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{t} + C$$

(iv) $$\int dx = \int 1.\, dx = \int x^o\, dx \quad (n = o)$$

$$= \frac{x^{0+1}}{0+1} = x + C$$

x^{-1} या $\frac{1}{x}$ का समाकल घातसूत्र से नहीं होगा इसका मानक सूत्र निम्नलिखित होगा।

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$$

चूंकि ln x का अवकलज $\frac{1}{x}$ होता है अतः $\frac{1}{x}$ का समाकल ln x + C होना चाहिए परन्तु x के शून्य से कम होने पर $x<0$ $|x| = -x$ होगा

$$\frac{d}{dx} \ln (-x) = \frac{1\ (-1)}{(-x)} = \frac{1}{x} \text{ (Chain rule)}$$

इस प्रकार $\ln |x|$ का अवकलन दोनों ही परिस्थितियों में जब $x < 0$ हो अथवा $x>0$ हो $\frac{1}{x}$ ही होगा। अतः $\frac{1}{x}$ का प्रतिअवकलज अथवा समाकल $\ln (x) + c$ही लिखा जाएगा अथवा

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ $x > 0$ की शर्त जोड़ी जाएगी क्योंकि धनात्मक संख्याओं के ही लघुगुणक होते हैं।

इसके अतिरिक्त समाकल ज्ञात करनें सम्बन्धी कुछ नियमों का स्पष्टीकरण भी यहां आवश्यक है। एक स्थिरांक एवं x के फलन का गुणा होने पर समाकलन निम्नानुसार होगा;

$$\int K\ f(x)\ dx = K \int f(x)\ dx$$

अर्थात स्थिरांक फलन के समाकल से गुणा हो जाएगा उदाहरणार्थ:

(i) $\int 3x^2\, dx = 3 \int x^2\, dx$

$$= 3 \left(\frac{x^3}{3}\right) + C = x^3 + C$$

(ii) $\int 5\, dx = 5 \int dx$ (1 dx न लिख कर केवल dx ही लिखा जाता है)

$$5 \int dx = 5x + C$$

ध्यान रहें चरो को समाकाल चिन्ह से बाहर न निकालें चर धातांकीय फलन (exponential function) के नियम निम्नलिखित हैं—

(i) $\int e^x\, dx = e^x + C$

(ii) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ or $\frac{a^x}{\log_e^a} + C$

$$= a^x \log_a e + c$$

हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx} a^x$

$= a^x \log_e a = \frac{a^x}{\log_a^e}$ होता है।

(iii) $\int 3^{4x}\, dx = \frac{3^{4x}}{4 \log_e^3} + C$

$$= \frac{3^{4x}}{4} \log_3 e + c$$

(iv) $\int 8\ e^{-3x}\ dx = 8 \int e^{-3x} + C$

$$= 8 \frac{e^{-3x}}{-3} + C = \frac{-8\ e^{-3x}}{3} + C$$

(v) $\int (8^x + 4^x)\ dx$

$$= (8^x \log_8 e + c_1) + (4^x \log_4 e + c_2)$$

$$= (8^x \log_8 e + 4^x \log_4 e + c \quad (\because c_1 + c_2 = c)$$

दो या अधिक फलनों के जोड़ या बाकी का समाकल उनके अलग-अलग समाकलों के जोड़ या बाकी के बराबर होगा।

जैसे

$$\int [\ f\ (x) - g\ (x)\ ]\ dx$$

$$= \int f\ x\ dx - \int g\ (x)\ dx$$

इसी प्रकार

$$\int [\ f\ (x) \quad g\ (x)\ ]\ dx$$

$$= \int f\ \bar{(x)}\ dx \int g\ (x)\ dx$$

उदाहरणार्थ:

(i) $\int [\ 2 \cdot x^6 - 3x^2 + 2x - 5)\ dx$

$$= (\frac{2x^7}{7} - x^3 + x^2 + 5x\ ) + c$$

(ii) $\int (5\ e^{3x} + 2x^{-2} + \frac{5}{x} + 1)\ dx$

$$= 5 \int e^{3x}\,dx + 2 \int x^{-2}\,dx + 5 \int \frac{1}{x}\,dx + \int dx$$

$$= \frac{5e^{3x}}{3} + c_1 + (2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_2) + (5 \ln x + c_3) + (x + c_4)$$

$$= \frac{5e^{3x}}{3} - \frac{2}{x} + 5 \ln x + x + c$$

बोध प्रश्न 1

* अपना उत्तर लिखने के लिए प्रत्येक प्रश्न के सामने छोड़ी गई खाली जगह का प्रयोग करें।
* इकाई के अन्त में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तरों का मिलान करें।

(i) $\int 3x^7 \, dx$

(ii) $\int 4\sqrt{x} \, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(iv) $\int (6^x + 2^x) \, dx$

(v) $\int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x}\right) dx$

(vi) $\int \left(4e^{-3x} - 2x^{-3} + \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x} - 3\right) dx$

10.3.2 प्रतिस्थापन के द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

सभी प्रश्नों अथवा सवालों का उत्तर उपर्युक्त वर्जित नियमों के प्रयोग से प्राप्त नहीं किया जा सकता। कई बार कुछ चरों को प्रतिस्थापित कर दिये हुए प्रश्न को मानक रूप में बदल कर उत्तर ज्ञात किया जाता है। मानक रूप में बदलने के बाद उपर्युक्त वर्णित सूत्रों का प्रयोग कर समाकल ज्ञात किया जा सकता है। इस विधि को प्रतिस्थापन विधि (Method of substitution) कहा जाता है। सर्वप्रथम रैखिक प्रतिस्थापन की चर्चा करेंगे। हम मूल चर को रैखिक अभिव्यक्ति से बदल देते हैं। हम जानते हैं कि —

$\int f(x) \, dx = F(x) + c$, उसी प्रकार

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

जहां a एवं b दो स्थिरांक $(a \neq 0)$ हैं।

दूसरे शब्दों में $f(ax + b)$ का समाकल ज्ञात करने के लिए हम $(ax + b)$ को दो अलग-अलग अंग नहीं मानकर एक ही चर मानते हैं एवं समाकल को x के गुणांक से विभाजित करते हैं।

उदाहरण —

(i) $$\int (ax + b)^n \, dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + c$$

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ इसी प्रकार

x की जगह (ax + b) लिखने पर :

$$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + c \; (a \neq o)$$

(iii) $\int e^x dx = e^x + c$ इसी प्रकार

$$\int e^{(ax+b)} dx = \frac{(ax+b)}{a} + c \; (a \neq 0)$$

(iv) $\int e^{(5-3x)} dx = \frac{e^{5-3x}}{-3} + c$

or $-\frac{1}{3} e^{5-3x} + C$

सामान्य प्रतिस्थापन की विधि में किसी पद को u के बराबर रखकर x एवं dx को du में बदला जाता है इसके बाद उनका समाकल करके पुनः u का मान रख दिया जाता है।

उदाहरण :—

(i) $\int 6x \; ex^2+6 \; dx$

प्रतिस्थापन द्वारा यदि

$u = x^2+6 \quad \frac{du}{dx} = 2x$ अतः $du = 2x \; dx$

एवं $6x \; dx = 3du$

दिया हुआ समाकल

$$\int 3 \; e^u du$$
$$= 3 \int e^u du$$
$= 3e^u + c$ (u का मान रखने पर)
$$= 3 \; ex^2+6 + c$$

(ii) $\int x \sqrt{(x-1)} \; dx$

यदि $u = \sqrt{(x-1)}$

$u^2 = x-1$

$x = (x^2+1)$

$$\frac{dx}{du} = 2u \quad (\therefore\ dx = 2u\ du)$$

अत: $\int x\ \sqrt{(x-1)}\ dx$

$$= \int (u^2+1)\ .\ u\ 2u\ du$$

$$= 2\int u^4 + u^2)\ du$$

$$= 2\ \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{2}{15}(3u^5 + 5u^3) + c$$

$$= \frac{2}{15}u^3\ (3u^2 + 5) + c$$

$$= \frac{2}{15}(x-1)^{3/2}\ (3x - 3 + 5) + c$$

$$= \frac{2}{15}(3x + 2)\ (x - 1)^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{15}(3x + 2)\ \sqrt{(x-1)^3} + c$$

बोध प्रश्न 2

(i) $\int x\ e—x^2\ dx$

(ii) $\int \frac{18x+12}{3x^2+4x+8}\ dx$

103.3 हिस्सों द्वारा समाकलन (integration by parts)

यह विधि व्यवहार में बहुत काम आती है। इसका सूत्र निम्नांकित है

$$\int u\vartheta\ dx$$

इसमें u एवं ϑ दो फलन लिये गये हैं। इसमें द्वितीय फलन ऐसा लिया जाना चाहिए जो सुगमतापूर्वक समाकलनीय (integrable) हो। अर्थात् इसका समाकलन हो सकता हो।

सूत्र $\int u\vartheta\ dx$

$$= u\int\vartheta\ dx - \int\left(\frac{d(u)}{dx}\int\vartheta dx\right)\ dx$$

अर्थात्, प्रथम फलन x (गुणा) दूसरे फलन का समाकल x के संदर्भ में — (बाकी) समाकल [प्रथम फलन का अवकलज (derivative) x (गुणा) समाकल द्वितीय फलन का x के संदर्भ में] x के संदर्भ में;

उदाहरण

$\int \log x \, dx$ or $\int \ln x \, dx$

इसमें दूसरा फलन 1 होगा।

$$\log x \int 1 \, dx - \int \left[\frac{d(\log x)}{dx} \int 1 \, dx\right] dx$$

$$= x \log x - \int \left(\frac{1}{x} . x\right) dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx$$

$$= x \log x - x + c$$

$$= x (\log x - 1) + c$$

(ii) $\int (x + 3)(x + 1)^{1/2} \, dx$

$$= (x+3) \int (x + 1)^{1/2} dx - \int \left[\frac{d(x+3)}{dx} \int (x + 1)^{1/2} dx\right] dx$$

$$= (x+3) \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - \int \left[1 \times \frac{2}{3} (x+1)^{3/2}\right] dx$$

$$= \frac{2}{3} (x + 3)(x + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} (x + 1)^{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{15} (x+1)^{3/2} (5x+15-2x-2)+c \quad [(x+1)^{3/2} \text{ कामन लेने पर}]$$

$$= \frac{2}{15} (x + 1)^{3/2} (3x + 13) + c$$

बोध प्रश्न 3

1. $\int x^2 \log x \, dx$
2. $\int x^3 e^x \, dx$
3. $\int x (x + 1)^{1/2} \, dx$

10.3.4 भाग देकर समाकलन (Integration by Divisition)

जब किसी पद में अंश (Numerator) की राशि हर (denominator) से ऊंची हो अथवा उसके बराबर हो तो अंश में हर का भाग देकर प्राप्त राशि का समाकलन किया जाता है।

उदाहरण :

$$\int\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$$

$$= \int\left[1 - \frac{2}{(x+1)}\right] dx$$

$$= \int 1dx - 2\int \frac{1}{(x+1)} dx$$

$$= x - 2\log(x+1) + c$$

(ii) $\int\left(\frac{4x^2}{x+1}\right) dx$ अंश में हर का भाग देने पर

$$= \int\left(4x - 4 + \frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$= [2x^2 - 4x + 4\log(x+1)] + c$$

$$= 2[x^2 - 2x + 2\log(x+1)] + c$$

बोध प्रश्न 4

(1) $\int\left(\frac{2x^2}{x+4}\right) dx$

(2) $\int\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right) dx$

10.3.5 आंशिक अनुपातों द्वारा समाकलन (Integration by partial fractions) — इस विधि में दीं हुई राशि को पहले आंशिक अनुपातों (Partial Fractions) में बदला जाता है और तत्पश्चात् समाकलन किया जाता है।

हम जानते हैं कि $\left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right)$ को हल करने पेर हमें

$$\frac{3(x+1) - 2(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}$$ प्राप्त होगा।

अतः $\frac{x-1}{(x+2)\ (x+1)}$ के दो अनुपात क्रमशः

$$\frac{3}{(x+2)} - \frac{2}{(x+1)}$$

हुए। इन्हें आंशिक अनुपात कहा जाता है। इनका सीधा समाकलन किया जा सकता है। इस विधि में कई प्रकार के जटिल प्रश्न भी आते हैं। लेकिन हम यहां कुछ सुगम किस्म के आंशिक अनुपातों पर ही अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे।

उदाहरणः

(i) $\int \frac{3x}{2x^2 - x-1}\ dx$

$$= \int \frac{3x}{(2x+1)\ (x-1)}\ dx$$

यहां $\frac{3x}{(2x+1)\ (x-1)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(2x+1)}{(2x+1)\ (x-1}$

$\therefore \quad 3x = A\ (x - 1) + B\ (2x+1)$

$= x\ (A + 2B) - A + B$

जिससे $A + 2B = 3$ ...... (1)

तथा $-A + B = 0$ .... (2)

(1) व (2) को हल करने पर $A = 1$ $B = 1$

दिया हुआ समाकल :

$$\int \left(\frac{1}{2x+1}\right) dx + \int \left(\frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log (2x + 1) + \log (x - 1) + c$$

$= \quad \log (2x+1)^{½} + \log (x - 1) + c$

$= \quad \log \sqrt{2x+1} + \log (x - 1) + C$

$= \quad \log \sqrt{2x-1)}\ (x-1) + c \quad (\because \log m + \log n = \log mn)$

(ii) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}\ dx$

यहां अंश में हर का भाग देने पर

$$= \int \left[x - 2 + \frac{x-3}{(x+1)\ (x-1)} \right] dx$$

अब आंशिक अनुपातों की विधि लागू की जाएगी।

अतः $\frac{x-3}{(x+1)\ (x-1)}$

$$= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$= \frac{A\ (x-1) + B\ (x+1)}{(x+1)\ (x-1)}$$

$$= \frac{x\ (A+B) - A+B}{(x+1)\ (x-1)}$$

$\therefore\ A + B = 1$ .... (i)

तथा $- A + B = -3$ ..... (ii)

(1) एवं (2) को हल करने पर

$A = 2$

$B = -1$

$$\therefore \frac{x-3}{(x+1)\ (x-1)} = \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)}$$

$$2 \int \frac{dx}{(x+1)} - \int \frac{dx}{(x-1)}$$

$$= 2 \log (x + 1) - \log (x - 1)$$

इसलिए दिया हुआ समाकल

$$\frac{1}{2} x^2 - 2x + 2 \log (x + 1) - \log (x - 1) + c$$

बोध प्रश्न 5

निम्नलिखित आंशिक अनुपातों द्वारा हल कीजिए –

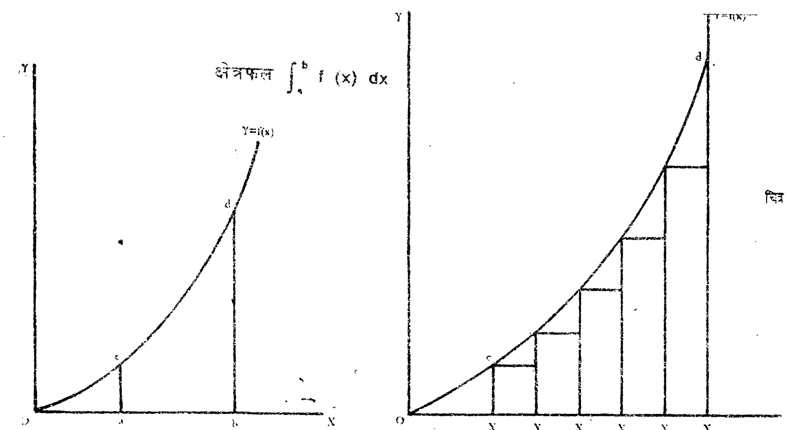
(i) $\int \frac{(1+x)}{(1-x)^2} dx$ संकेत $\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2}$

जो $-\dfrac{1}{(1-x)} + \dfrac{2}{(1-x)^2}$ होंगे तत्पश्चात् समाकलन कीजिए

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-25)}$

10.4 निश्चित समाकलन (Definite Integral)

निश्चित समाकलन के प्रयोग से हम किसी वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं चित्र 10.1 a में मान लीजिए हमें **x = a** तथा **x = b** के बीच वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। इसका कोई ज्यामितीय सूत्र नहीं है यदि हम **(a, b)** दूरी को n टुकड़ों में बांटकर उन पर आयत बना लेते हैं जैसाकि चित्र **10.1 (b)** में किया गया है तो उन आयतों के क्षेत्रफल का जोड़ वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के लगभग बराबर (फिर भी कम) रहेगा। इसलिए हम **a** से **b** के बीच के आयतों को और भी छोटा अत्यन्त सूक्ष्म कर लेते हैं ताकि आयतों के क्षेत्रफल का योग एवं वक्र के नीचे के क्षेत्रफल में अन्तर न्यूनतम हो सके। गणितीय रूप में वक्र के नीचे a से b तक की दूरी तक का क्षेत्रफल **(a b c d)** समाकल के द्वारा भली-भांति प्रकट किया जा सकता है। :



चित्र 10.1 (a) चित्र 10.1 (b)

10.4.1 निश्चित समाकल (The definite Integral)

ऊपर $y = f(x)$ का निश्चित समाकल a से b की दूरी में ज्ञात करना है। इसे $\int_a^b f(x)\,dx$ के रूप में लिखा गया है जिसे इस तरह पढ़ा जाएगा **f (x)** का **x** के सन्दर्भ में **a** से **b** तक की दूरी का समाकल यहां $a < b$ है, अर्थात् a निचली सीमा है तथा b ऊपरी सीमा है। इन दूरियों के कारण यह निश्चित समाकल हो जाता है एवं इसकी गणना से एक निश्चित अंकीय मूल्य ज्ञात होता है।

गणितीय रूप में इसे निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + c]_a^b = [F(b) + c] - [F(a) + c]$$

$$= F(b) - F(a)$$

अत: पहले f(x) का समाकल करके F(x) प्राप्त किया गया है फिर उसमें x की जगह ऊपरी सीमा b रखी गयी है और उसमें से x की

जगह निचली सीमा a रखकर घटा दी गई है। प्राप्त परिणाम में स्थिर राशि c नहीं आती क्योंकि वह कामन होने से घटने के दौरान समाप्त हो जाती है।

उदाहरण :

$$\int_1^4 2x\ dx = [x^2]_1^4$$

$$= 4^2 - 1^2 = 15$$

निश्चित समाकल की निम्न विशेषताओं पर ध्यान दिया जाना चाहिए :

(1) सीमाओं को परस्पर बदलने से निश्चित समाकल की चिन्ह/दिशा परिवर्तित हो जाएगी अर्थात् घनात्मक चिन्ह ऋणात्मक हो जाएगा:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

(2) यदि दोनों सीमाएँ बराबर हों तो निश्चित समाकल शून्य होगा

$$\int_a^a f(x)\ dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

(3) एक निश्चित समाकल को उसके टुकड़ों के जोड़ के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं जैसे :

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx \quad \text{यदि } (a \le b \le c)$$

उदाहरण:

(i) $\int_0^2 2^x\ dx = [2^x \log_2 e]$ or $[2^2 \log_2 e] - [2^0 \log_2 e]$

$= 4 \log_2 e - \log_2 e \quad (\because 2^0 = 1)$

$= 3 \log_2 e$

(ii) $\int_a^b x^4\ dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}[b^5 - a^5]$

(iii) $\int_0^2 e^{3x}\ dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2 = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}[e^6 - 1]$

उदाहरण –

$y = x^2$ के वक्र के नीचे का क्षेत्र ज्ञात कीजिए जबकि $x = 0$ एवं $x = 2$ हो

$$\int_0^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

उदाहरण - x उत्पादन स्तर पर एक फर्म का सीमान्त लागत फलन दिया हुआ है

$C^1(x) = 23.5 - 0.01x$

जब उत्पादन का स्तर 1000 इकाइयों से बढ़ाकर 1500 इकाइयां किया जाता है तो कुल लागत में वृद्धि ज्ञात कीजिए

हल -

कुल लागत में वृद्धि होगी।

$$\int_{1000}^{1500} C^1(x)\, dx = \int_{1000}^{1500} [23.5 - 0.01x]\, dx$$

$$= [23.5x - 0.01\, x^2/2]_{1000}^{1500}$$

$$= 23.5(1500) - 0.005(1500)^2 - [23.5(1000) - 0.005(1000)^2]$$

$$= 35250 - 11250 - (23500 - 5000) = 5500$$

अतः लागत में वृद्धि 5500 रु. होगी।

10.4.2 अनंत समाकल (Improper Integrals)

यदि किसी निश्चित समाकल में ऊपरी या नीचली सीमा में अनन्त राशि (Infinity) आए तो उसे अनन्त समाकल कहते हैं; जैसे

$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ और $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ अनन्त समाकल के उदाहरण है।

अनन्त समाकलों में सीमा के विचार का प्रयोग करके परिणाम ज्ञात किया जाता है। सीमा के होने या न होने से परिणाम पर असर पड़ता है।

उदाहरण : $\int_1^{\infty} 3x^{-2}\, dx = [-3x^{-1}]_1^{\infty} = [-3/x]_1^{\infty}$

$$= \frac{-3}{\infty} + \frac{3}{1} = 3$$ ($\because$ —3/8 की सीमा शून्य है)

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_0^{\infty} = \log \infty - \log 0$

इसका कोई निश्चित मूल्य नहीं है क्योंकि $\log \infty$ व $\log 0$ के मूल्य परिभाषित नहीं है।

(iii) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = (-e^{-\infty}_{0}) + e^{-0}$

$$= \left[\frac{1}{-e^{\infty}} + \frac{1}{e^0}\right] = -0+1 = 1$$

[$\because$ $e^{\infty} = \infty$ तथा $e^0 = 1$ होता है]

(iv) $\int_1^2 (4x^2 + 1)^2 8x \; dx$

यहां $u = 4x^2 + 1$ रखने पर

$$\frac{du}{dx} = 8x \qquad \therefore \quad 8x\; dx = du$$

अब सीमाएं भी बदलनी होगी

जब $x=1$ तो $u=5$ होता है और $x=2$ रखने पर $u=17$ होता है

$\therefore$ दिया हुआ समाकल निम्न रूप धारण कर लेगा।

$$\int_5^{17} u^2 \, du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_5^{17} = \frac{17^3}{3} - \frac{5^3}{3}$$

$$= 1637\frac{2}{3} - 41\frac{2}{3} = 1596$$

(v) $\int_1^{\infty} 4/x \; dx = [\,4 \log x]_1^{\infty}$

$= [4 \log \infty - 4 \log 1] = 4 \log \infty \quad (\because \log 1 = 0)$

इस अनन्त समाकल का कोई निश्चित मूल्य नहीं है क्योंकि log ∞ का कोई परिभाषित मूल्य नहीं है।

बोध प्रश्न 6

निम्नलिखित निश्चित समाकलों के मूल्य ज्ञात कीजिए

(i) $\int_1^{10} 3\,x^2 \; dx$

(ii) $\int_1^{4} (x^{-1/2} + 3x^{1/2}) \; dx$

(iii) $\int_0^{10} 2\,e^{-2x} \; dx$

(iv) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

10.5 उत्पादन के क्षेत्र में समाकलन का प्रयोग

अर्थशास्त्र में सीमान्त फलन से कुल फलन की ओर अग्रसर होना अत्यन्त महत्वपूर्ण होता है। यदि एक उत्पादक को अपने उत्पादन की सीमान्त लागत ज्ञात है तो वह समाकलन का प्रयोग करके कुल लागत ज्ञात कर सकता है। प्रस्तुत उदाहरण के द्वारा इसे स्पष्ट किया गया है।

2.16

उदाहरणः

यदि $MC = 15 + 25\,Q - 15Q^2$ है तथा स्थिर लागत 60 रु. है। कुल लागत, औसत लागत एवं कुल परिवर्तनशील लागत ज्ञात कीजिए।

हल :-

$$MC = 15 + 25Q - 15\,Q^2$$

$$TC = \int MC\; dQ = \int [15 + 25Q - 15Q^2]\; dQ$$

$$= \quad 15Q + \frac{25Q^2}{2} - 5Q^3 + c$$

चूंकि स्थिर लागत 60 रु. है, उत्पादन $Q = 0$ होने पर $c = 60$

$$\therefore\; TC = 15Q + \frac{25}{2}Q^2 - 5Q^3 + 60$$

$$AC = \frac{TC}{Q} = 15 + \frac{25}{2}Q - 5Q^2 + \frac{60}{Q}$$

$$TVC = TC - FC = 15Q - \frac{25}{2}Q^2 - 5Q^3$$

उदाहरणः - $MR = 42 - 6Q - Q^2$ हो तो (TR) कुल आगम एवं मांग ज्ञात कीजिए।

हल :— $TR = \int MR\; dQ$

$$TR = \int [42 - 6Q - Q^2]\; dQ$$

$$= \quad 42Q - 3Q^2 - \frac{Q^3}{3} + c$$

यहां $Q = 0$ रखने पर $TR = 0$ होता है अतः $c = 0$ रखा जाएगा।

$$TR = 42\,Q - 3Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$$

मांग फलन = औसत आय (AR) = $\frac{TR}{Q} = 42 - 3Q - \frac{1}{3}Q^2$

उदाहरण :—

यदि $MR = 20 - 2x$ तथा $MC = 4 + (x - 4)^2$ हो तो लाभ अधिकतम करने वाली उत्पत्ति की मात्रा एवं शुद्ध लाभ (पूर्ण प्रतियोगिता में) ज्ञात कीजिए।

हल : लाभ = TR — TC

$\therefore TR = \int MR\, dx$ & $TC = \int MC\, dx$

$TR = \int (20 - 2x)\, dx \qquad TC = \int [4 + (x - 4)^2]\, dx$

$= 20x - x^2 = \int [x^2 - 8x + 20]\, dx$

$= 1/3x^3 - 4x^2 + 20x$

$\Pi = TR - TC$

$$= 20x - x^2 - [\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 20x]$$

$$\Pi = \frac{1}{3} x^3 + 3x^2$$

$\frac{d\Pi}{dx} = - x^2 + 6x = 0$ जिससे $x = 0$ एवं $x = 6$

$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = -2x + 6$ यह $x = 0$ पर $6 > 0$

तथा $x = 6$ पर $- 6 < 0$

जो अधिकतम की शर्त पूरा करती है अतः $x = 6$ पर लाभ अधिकतम होगा जिसकी राशि निकालने के लिए लाभ फंलन में $x = 6$ रखना होगा।

$$\Pi = -\frac{1}{3} x^3 + 3x^2$$

$$= -\frac{1}{3} (6)^3 + 3\ (6)^2$$

$$= -\frac{1}{3} \times 216 + 3 \times 36 = - 72 + 108 = 36$$

अतः 6 इकाईयां उत्पादित करने पर अधिकतम लाभ होगा एवं यह रु. 36 होगा।

बोध प्रश्न 7

(i) यदि $MC = 16e^{0.4Q}$ हो तथा $FC = 100$ हो तो TC ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $MC = 10 + 24x - 3x^2$ हो एवं एक इकाई उत्पादन की लागत 25 रु. हो तो TC एवं AC निकालिए।

[संकेत = कुल लागत फलन में $x = 1$ रखने पर एक इकाई की कुल लागत 25/- निकाली जा सकती है तथा AC ज्ञात करने के लिए TC/x या कुल लागत में उत्पादन का भाग दीजिए।

10.6 उपभोग, बचत एवं विनियोग या पूंजी निर्माण

समष्टि अर्थशास्त्र में उपयोग, बचत एवं विनियोग की दरों या सीमान्त प्रवृष्टियों के दिये होने पर हम उपभोग—फलन, बचत—फलन व पूंजी स्टॉक का समय-पथ निकाल सकते हैं।

उदाहरण :

यदि उपभोग की सीमान्त प्रवृति $C^1(y) = 0.8 + 0.2y^{-½}$ हो और $y = 100$ होने पर $c = y$ हो तो उपभोग फलन निकालिए।

हलः—

उपभोग फलन $c(y) = \int (0.8 = 0.2y^{-½})\, dy$

$$= 0.8y + \frac{0.2y^{½}}{½} + c$$

$C = 0.8y + 0.4y^{½} + c$ (यहां c स्थिरांक है)

स्थिरांक का पता लगाने के लिये $y = 100$ प्रतिस्थापित करने पर

$$100 = 0.8\,(100) + 0.4\,(100)^{½} + c$$
$$100 = 80 + 4 + c$$
$$100 = 84 + c$$
$$c = 16$$

$\therefore$ कुल उपभोग फलन $c(y) = 0.8y + 0.4y^{½} + 16$

उदाहरण :-

यदि बचत की सीमान्त प्रवृत्ति $MPS = 0.5 — 0.1\,y^{-½}$ हो तथा $y = 100$ होने पर कुल बचत शून्य हो तो बचत फलन निकालिए।

हलः-

$$s(y) = \int MPS\, dy$$
$$\therefore s(y) = \int (0.5 — 0.1y^{-½})\, dy$$
$$= 0.5y — 0.2y^{½} + c$$

दिये हुये आंकड़ों के अनुसार

$$0 = 0.5\,(100) — 0.2\,(10) + c$$
$$= 50 — 2 + c$$
$$— 48 = c$$

अतः $s(y) = 0.5y — 0.2y^{½} — 48$

इस फलन से आय दी हुई होने पर बचत की मात्रा ज्ञात की जाती है।

उदाहरण :—

यदि विनियोग दर $1(t) = 4t^{1/3}$ हो और

$K(0) = 0$ हो तो

(i) पूंजी स्टाक K का समय पथ निकालिए

(ii) (1, 4) की अवधि में पूंजी संचय कितना होगा।

हल :—

K(t) अथवा पूंजी स्टाक का समय-पथ

$= \int 4t^{1/3}\, dt = 4t^{4/3} \times 3/4 + c$

$= 3t^{4/3} + c$ $\quad t = 0$ रखने पर

$K(0) = 10 = c$

पूंजी स्टाक का समय पथ

$K(t) = 3t^{4/3} + 10$ होगा।

(ii) $\int_1^4 4t^{1/3}\, dt = [3t^{4/3}]_1^4$

$= 3 \times 4^{4/3} - 3 \times 1^{4/3}$

$= 3\ 3\sqrt{4^4} - 3 = 3\ 3\sqrt{256} - 3$

$= 3\ (3\sqrt{256} - 1)$

बोध प्रश्न 8

(i) यदि $c = f(y)$ हो तथा MPC = 0.8 एवं शून्य आमदनी पर उपभोग 40 रु. हो तो उपभोग फलन ज्ञात कीजिए यह भी बताइए कि 100 रु. की आमदनी पर उपभोग कितना होगा।

(ii) यदि विनियोग की दर $I(t) = 9t^{1/2}$ हो तो 8 वर्ष में पूंजी निर्माण की मात्रा कितनी हो जाएगी।

10.7 नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य (Present value of cash flow)

यदि A प्रारम्भिक धनराशि हो, r ब्याज की वार्षिक दर हो t अवधि की सूचक हो तो निरन्तर ब्याज लगाने पर अन्तिम राशि v निम्न फार्मूले से निर्धारित होगी।

$v = Ae^{rt}$

यह फार्मूला निम्न विधि से निकाला गया है

वार्षिक वृद्धि करने पर

$v = A(1+r)^t$

$v = A(1+r/2)^{2t}$ (छः माही वृद्धि करने पर)

$v = A(1+r/n)^{nt}$ (वर्ष में n बार वृद्धि करने पर)

$= A[(1+r/n)^{n/r}]^{rt}$

यहां $\frac{n}{r} = m$ रखने पर

$= [A(1+1/m)^m]^{rt}$

$\therefore \quad v = A e^{rt}$

लेकिन $\lim (1+1/m)^m = e$

इस सूत्र को इस प्रकार भी रख सकते हैं

$$A = \frac{v}{e^{rt}}$$

$$A = ve^{-rt}$$

जहाँ A = वर्तमान राशि v = वार्षिक प्राप्त होने वाली धनराशि, r = बट्टा काटने की दर, t = समयावधि है एवं बट्टा काटने में निरन्तरता चल रही हैं

उदाहरण :—

यदि प्रतिवर्ष 100 रूपये की स्थिर दर पर निरन्तर आय प्रवाह दिया हुआ है तो Π वर्तमान मूल्य निकालिए जबकि आय 2 वर्ष तक होगी तथा निरन्तर बट्टे की दर **0.05** सालाना है।

हल :-

$$\Pi = \int_0^2 100\ e^{-0.05t}$$

$$= \left[\frac{-100\ e^{-0.05t}}{0.05}\right]_0^2$$

$$= [-2000\ e^{0.05t}]_0^2$$

$$= -2000\ e^{-0.10} + 2000$$

$$= 2000\ (1 - e^{-0.10}) = 2000\ [1 - 1/e^{0.10}]$$

$$= 2000\ [1 - 1/1.105]$$

$$= 2000\ (1 - .905) = 2000 \times .095$$

$$= 190$$

बोध प्रश्न 9

(1) यदि प्रतिवर्ष 3000 रु. आय के प्राप्त होते हैं और बट्टे की दर $r = 0.06$ और समयावधि 2 वर्ष है तो निरन्तर आय प्रवाह की वर्तमान राशि निकालिए।

10.8 उपभोक्ता की बचत व उत्पादक की बचत

उपभोक्ता की बचत व उत्पादक की बचत निकालने में समाकलन बहुत उपयोगी है

C.S. = उपभोक्ता की बचत = [प्राप्त कुल उपयोगिता—कुल कीमत]

P.S. = उत्पादक की बचत = [उत्पादक की वास्तविक आय—वह जो लेने को तत्पर हो जाता]

उदाहरण :

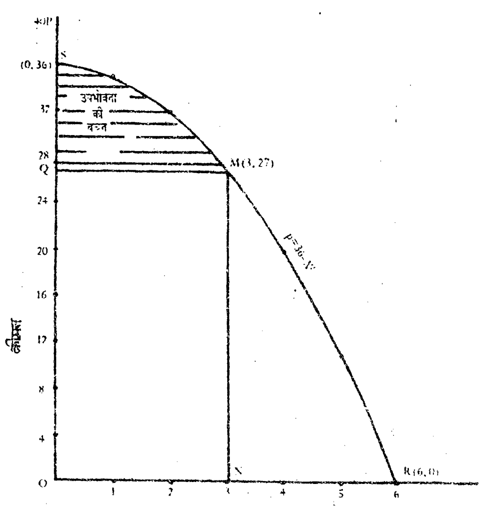
यदि मांग-फलन $p = 36 - x^2$ हो तो $x = 3$ पर उपभोक्ता की बचत निकालिए। यहां $p =$ कीमत एवं $x =$ मांग की मात्रा है। यहां पर मांग फलन में p को x का फलन दर्शाया गया है

अर्थात $p = f(x)$ है। स्मरण रहे कि मांग फलन में x को p के फलन के रूप में $x = f(p)$ प्रस्तुत करने से प्रश्न को दूसरी तरह से हल करना आवश्यक हो जाएगा। हम आगे चलकर ग्राफ द्वारा इस सम्बन्ध में सारी स्थिति स्पष्ट करेंगे

$p = 36 - x^2$ का ग्राफ बनाने के लिए x के विभिन्न मूल्यों पर p निकालने होंगे जो निम्नांकित होंगे।

तालिका 10.1

x	0	1	2	3	4	5	6
p	36	35	32	27	20	11	0



चित्र: 10.2

उपर्युक्त चित्र में SR वक्र $p = 36 - x^2$ का ग्राफ है

$x = 3$ पर $p = 36 - 9 = 27$ होगी।

अतः उपभोक्ता की बचत = [प्राप्त कुल उपयोगिता — कुल कीमत]

चित्र के अनुसार cs = वक्र के नीचे $(x = 3)$ तक का क्षेत्रफल — कुल कीमत

SQM = SMNO — QMNO

समाकल द्वारा

$$CS = \int_0^3 (36 - x^2)\, dx \quad - 3 \times 27$$

$$= \quad [36x - (1/3) \times 3]_0^3 - 81$$

$$= \quad [108 - 9] - 81$$

$$= \quad 99 - 81 = 18$$

उदाहरण

यदि पूर्ति फलन $p = 3x + 1$ हो तो $x = 2$ पर उत्पादक की बचत निकालिए।

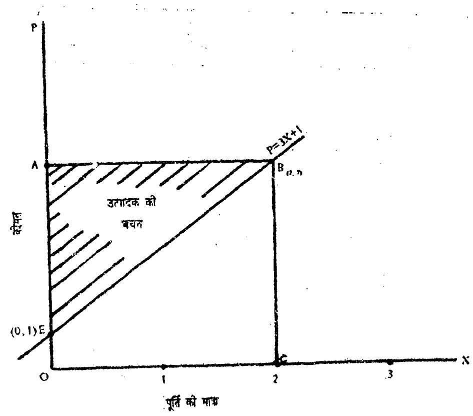
फलन को रेखाचित्र के रूप में प्रदर्शित करने के लिए x एवं p के विभिन्न मूल्यों की गणना करके उन्हें तालिका 10.2 में रखा गया है

तालिका 10.2

x	0	1	2
p	1	4	7

$p = 3x + 1$ में

$x = 2$ रखने पर $p = 3(2) + 1 = 7$



चित्र : 10.3

चित्र के अनुसार उत्पादक की बचत=

उत्पादक की वास्तविक प्राप्त आय — वह राशि जो वह लेने को तत्पर हो जाता

अथवा PS $= OCBA - OCBE$

$= ABE$

समाकल द्वारा

$$PS = (2 \times 7) - \int_0^2 (3x + 1) \; x$$

$$= 14 - \left[\frac{3x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$= 14 - [6 + x]$$

$$= 6$$

उदाहरण :—

मांग फलन $p = 20 - 3x^2$ है तथा पूर्ति फलन $p = 2x^2$ है। पूर्ण प्रतियोगिता में उपभोक्ता की बचत एवं उत्पादक की बचत निकालिए।

हल:- मांग फलन के लिए मूल्यों की गणना करके उन्हें तालिका 10.3 में रखने पर :

मांग फलन $p = 20 - 3x^2$

तालिका 10.3

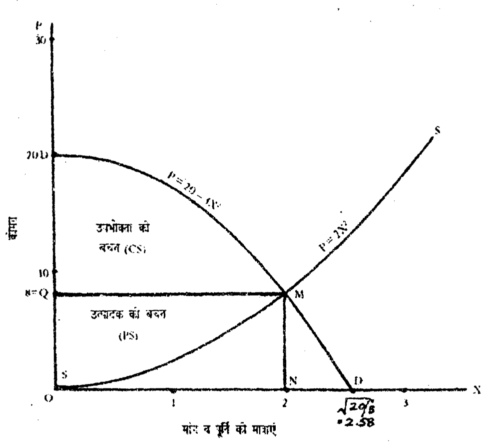
मांग फलन

x	0	1	2	$\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)}$
p	20	17	8	0

पूर्ति फलन के लिए मूल्यों की गणना करके उन्हें तालिका 10.4 में रखने पर :

तालिका 10.4

x	0	1	2	3
p	0	2	8	18



चित्र 10.4

मांग एवं पूर्ति के संतुलन में

$20 - 3x^2 = 2x^2$

$20 = 5x^2$ or $x^2 = 4$

$x = \pm 2$ $x = 2$ संतुलन मांग की मात्रा जिस पर $p = 8$ होगी

चित्र में CS = QMD = ONMD — ONMQ

समाकल लेने पर

$$CS = \int_0^2 (20-3x^2)\, dx - 2x8$$

$$= [20x - x^3]_0^2 - 16$$

$$= 40 - 8 - 16$$

$$CS = 16$$

उत्पादक की बचत ONMQ — ONM = SMQ

समाकल के रूप में

$$PS = 2 \times 8 - \int_0^2 2\ \ x^2\, dx$$

$$= 16 - \left[\frac{2}{3} x^3\right]_0^2$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$PS = \frac{32}{3}$$

उदाहरण—

पूर्ण प्रतिस्पर्द्धा में मांग व पूर्ति फलन क्रमशः $Q_d = 20 - 3p^2$ एवं $Q_s = 2\, p^2$ है उपभोक्ता की बचत एवं उत्पादक की बचत निकालिए।

संतुलन की स्थिति में

$Q_d = Q_s$

$\therefore 20 - 3p^2 - 2p^2$

या $5p^2 = 20$

या $p^2 = 4$

या $p = \pm 2$

अतः $p = 2$ पर $Q=8$ होगी

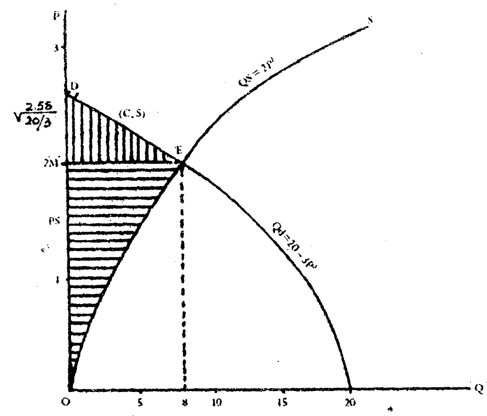
मांग एवं पूर्ति वक्रों को चित्र पर दर्शाने के लिए p के विभिन्न मूल्यों पर Q_d एवं Q_s निकाले गये हैं मांग फलन के मूल्य तालिका 10.5 एवं पूर्ति फलन के मूल्य तालिका 10.6 में रखे गये हैं।

तालिका 10.5

p	0	1	2	2.5	$\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)}$
Q_d	20	17	8	5/4	0

तालिका 10.6

p	0	1	2	3	4
Q_s	0	2	8	18	32



चित्र 10.5

उपभोक्ता की बचत चित्र के आधार पर DME एवं उत्पादक की बचत OME हैं

समाकल लेने पर

$$CS = \int_{2}^{\sqrt{\frac{20}{3}}} (20 - 3p^2)\, dp$$

$$= \left[20p - p^3 \right]_{2}^{\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)}}$$

$$= \left[20\sqrt{\frac{20}{3}} - \left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 \right] - [40 - (2)^3]$$

$$= \left[20\sqrt{\frac{20}{3}} - \frac{20}{3}\sqrt{\frac{20}{3}} \right] - 40 + 8$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}} \left(20 - \frac{20}{3} \right) - 32$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}}, \quad \frac{40}{3} - 32 = 34.4 - 32 = 2.4$$

$$\left[\because \sqrt{\frac{20}{3}} = 2.58 \right]$$

$$PS = \int_0^2 2p^2\, dp = \left[\frac{2}{3} p^3\right]_0^2$$

$$PS = \frac{16}{3} \quad \& \quad CS = 2.4$$

उपर्युक्त उदाहरणों में फलन का स्वरूप बदलने से क्या असर पड़ता है इसे समझने का प्रयत्न करें

बोध प्रश्न 10

(1) यदि मांग फलन $p = \frac{8}{x+1} - 2$ तथा पूर्ति फलन

$p = ½ (x+3)$ हो तो उपभोक्ता की बचत ज्ञात कीजिए।

(ii) एक एकाधिकारी के लिए मांग फलन (जहां लाभ अधिकतम होता है) $p = 274 - Q^2$ है तथा सीमान्त लागत $MC = 4 + 3Q$ है तो उपभोक्ता की बचत ज्ञात कीजिए।

[उत्तर संकेत $AR = 274 - Q^2$ है $\therefore TR = 274Q - Q^3$ तथा MR $274 - 3Q^2$ होगी जहां MR = MC होते है Q = 9 एवं p = 193 है]

10.9 सारांश –

इस इकाई में आपने

- समाकलन की अवधारणा एवं इसे ज्ञात करने के कुछ सामान्य नियमों का अध्ययन किया।
- एक वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करने की तकनीकी प्राप्त की।
- अनन्त समाकल, निश्चित एवं अनिश्चित समाकल प्राप्त करने की सामान्य विधियों की जानकारी प्राप्त की।

इस इकाई में आपने समाकलन की अर्थशास्त्र के क्षेत्र में उपयोगिता का अध्ययन किया। सीमान्त फलन दिया हुआ होने पर हम उसके समाकलन द्वारा कुल फलन ज्ञात कर सकते हैं। इन प्रकार सीमान्त लागत से कुछ लागत, सीमान्त आगम से कुल आगम एवं सीमान्त उपयोगिता से कुल उपयोगिता ज्ञात कर सकते हैं। इसी तरह उपभोग की सीमान्त प्रवृत्ति दी हुई होने पर उपभोग फलन ज्ञात कर सकते हैं एवं बचत

प्रवृति से बचत फलन ज्ञात क सकते है उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत निकालने के लिए भी समाकलन उपयोगी है।

10.10 विविध प्रश्न

(i) $\int \frac{3-5t + 7t^2 + t^3}{t^2} dt$

हल

$\int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{5}{t} + 7+t\right) dt$ उत्तर $= \frac{-3}{t} - 5 \log t+7t+ \frac{t^2}{2} + C$

(ii) $\int (2x + 1)^7 dx =$ उत्तर $\frac{1}{16} (2x + 1)^8 + C$

(iii) $\int \frac{1}{2y-1} dy$ उत्तर $\frac{1}{2} \log (2y-1) + C$

(iv) किसी उत्पाद के पूर्ति एवं मांग फलन इस प्रकार है पूर्ति फलन

पूर्ति फलन $p = 52 + 2x$
मांग फलन $p = 100 - x^2$

उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत ज्ञात कीजिये यदि संतुलन स्थापित हो चुका है।

उत्तर – उपभोक्ता की बचत = 144
उत्पादक की बचत = 36

(v) नीचे दिये गये मांग एवं पूर्ति फलनों के आधार पर यह मानते हुए कि संतुलन स्थापित हो चुका है उपभोक्ता एवें उत्पादक की बचतें ज्ञात कीजिए

		उत्तर
(i)	$D : P = 15-2x$ $S : P = 3 + x$	C.S. = 16 P.S. = 8
(ii)	$D : P = 1200-1.5 x^2$ $S:P = 200 + x^2$	C.S. = 8000 P.S. = 16000/3
		उत्तर
(iii)	$D : P = \frac{280}{X+2}$ $S : P = 20 + 2.5 x$	C.S. = 178.16 P.S. = 45

10.11 प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

(i) $\frac{3}{8} x^8 + C$ (ii) $\frac{8}{3} \sqrt{x^3} + C$ (iii) $2\sqrt{x} + C$

(iv) $6^x \log_6 e + 2^x \log_2 e + C$

(v) $-\frac{1}{2} \log x + \frac{3}{4} \log x + C = \frac{1}{4} \log x + C$

(vi) $-\frac{4}{3} e^{-3/x} + x^{-2} - 4x^{-1} - 6 \log x - 3x + C$

बोध प्रश्न 2.

(i) $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ (ii) $3 \log (3x^2 + 4x + 8) + C$

बोध प्रश्न 3.

(i) $\frac{1}{\;}$ [illegible] $\log x \frac{1}{3}) + C$

(ii) $e^x (x$[illegible] $- 3x^2 + 6x - 6) + C$

(iii) $\frac{2}{3} x (x+1)^{3/2} \frac{4}{15} (x+1)^{5/2} + C$

बोध प्रश्न 4.

(i) $x^2 - 8x + 32 \log (x+4) + C$

(ii) $\frac{3}{2} x + \frac{11}{4} \log (2x - 3) + C$

बोध प्रश्न 5.

(i) यहां $\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2}$ रखना होगा $A = -1$

व $B = 2$ फिर हल करने पर

$$\log (1-x) + \frac{2}{(1-x)} + C$$

(ii) $\frac{1}{10} \log \frac{x-5}{x+5} + C$

बोध प्रश्न 6 (i) 999 (ii) 16 (iii) 1 सीमा लेने पर (iv) ½ log 3

बोध प्रश्न 7

(i) $TC = 40\ e^{0.4Q} + 60$

(ii) $TC = 10x + 12x^2 - x^3 + 4$

$$AC = 10 + 12x - x^2 + \frac{4}{x}$$

बोध प्रश्न 8

(i) C = 0.8 y + 40, 100 रुपये की आमदनी पर उपभोग 120 रुपये का होगा।

(ii) $96 \sqrt{2} = 135.76$

बोध प्रश्न 9 (i) 5655 रुपये

बोध प्रश्न 10

(i) C-S = 8 log $^{2-4}$

संकेत x = 1 पर p = 2 होगी

$$C\text{-}S = \int_0^1 \left[\left(\frac{8}{(x+1)} - 2\right) dx - (2x + 1) \right]$$

(ii) $C\text{-}S = \int_0^1 (274 - Q^2)\, dQ - 1737$

$= 486$

10.12 शब्दावली

सीमान्त लागत	=	Marginal Cost
सीमान्त आगम	=	Marginal Revenue
कुल लागत	=	Total Cost
कुल आगम	=	Total Revenue
उपभोक्ता की बचत	=	Consumer's surplus
उपभोग की सीमान्त प्रवृत्ति	=	Marginal Propensity to consume
बचत की सीमान्त प्रवृत्ति	=	Marginal Propensity to save
बट्टा काटने की दर	=	Rate of discount
कुल उपयोगिता	=	Total Utility
कुल परिवर्तनशील लागत	=	Total Variable Cost
समाकलन	=	Integration

चलन वेग	= Velocity
प्रति अवकलन	= Antiderivative
समाकल्य	= Integrand
घात	= Power
निश्चित समाकलन	= Definite Integral
अनिश्चित समाकलन	= Indefinite Integral
प्रतिस्थापन	= Substitution
समाकल	= Integral
क्षेत्रफल	= Area
स्थिरांक	= Constant
अभिव्यक्ति	= Expressions
रैखिक	= Linear
आंशिक अनुपात	= Partial Fraction

10.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

- Alpha C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics 3rd ed. 1984.
- Edward T. Dowling, Mathematics for Economists 1986.
- Jean E. Weber Mathematical Analysis, Business and Economic Applications 4th ed Harper & Row 1982.
- Jagdish Arya, Robin Lardner, Mathematical Analysis : For Business and Economics 2nd ed 1985 Prentice Hall ch. 17.

इकाई -11

आव्यूह (मैट्रिक्स) बीजगणित का परिचय

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

- मैट्रिक्सों की पहचान कर सकेंगे
- मैट्रिक्सों का योग तथा गुणा कर सकेंगे
- मैट्रिक्स का प्रतिलोम ज्ञात कर सकेंगे
- मैट्रिक्स बीजगणित की प्रविधि द्वारा रेखीक समीकरण निकायों को हल कर सकेंगे
- मैट्रिक्सों का पृथक्करण कर जोड़, घटाना, गुणा आदि संक्रियायें कर सकेंगे

11.1 प्रस्तावना

कई विश्लेषणों में चर एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय या समूह के रूप में अन्तर्सम्बन्धित माने जाते हैं। आव्यूह (मैट्रिक्स) बीजगणित स्पष्ट एवं संक्षिप्त संकेतन द्वारा ऐसी समस्याओं के सूत्रीकरण एवं समाधान की विधि है। मैट्रिक्स बीजगणित रैखिक समीकरण निकायों को हल करने में बहुत उपयोगी है। मैट्रिक्स बीजगणित में हम संख्याओं को पंक्तियों और स्तंभों के आयताकार रूप में रखकर उन्हें एक ही प्रतीक (symbol) द्वारा चिह्नित कर सकते हैं और फिर इन प्रतीकों पर गणना की संक्रियाएें कर सकते हैं। गणित, प्राकृतिक विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान के अनेक क्षेत्रों में मैट्रिक्सों के कई महत्वपूर्ण अनुप्रयोग किये जाते हैं।

इस इकाई में हम मैट्रिक्स बीजगणित में प्रयुक्त शब्दों एवं चिह्नों की परिभाषाओं एवं विशेष प्रकार के मैट्रिक्स के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। मैट्रिक्सों के जोड़, बाकी, गुणा, क्रम-परिवर्तन आदि संक्रियाओं और प्रतिलोम मैट्रिक्स ज्ञात करने की विधियों की जानकारी प्राप्त कर मैट्रिक्स बीजगणित द्वारा रैखिक समीकरण निकायों को हल करने की विधि सीखेंगे। मैट्रिक्स बीजगणित के अन्य प्रयोगों की जानकारी आप इकाई 15 व इकाई 17 में प्राप्त करेंगे।

11.2 बुनियादी परिभाषायें

मैट्रिक्स या आव्यूह (Matrix)

जब राशियाँ या संख्यायें पंक्तियों तथा स्तम्भों में सुनिश्चित क्रम में व्यवस्थित होती हैं अर्थात् आयातकार क्रम विन्यास (array) के रूप में होती हैं तब उसे आव्यूह या मैट्रिक्स कहते हैं।

मैट्रिक्स की पंक्तियों तथा स्तम्भों को निम्न प्रकार के किसी कोष्ठक में लिखकर व्यक्त करते हैं:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{Vmatrix}$$

यहाँ हम मैट्रिक्स के निरूपण में सर्वाधिक प्रचलित प्रथम प्रकार के बड़े ब्रेकट [ ] का ही प्रयोग करेंगे।

मैट्रिक्स के अवयव (Elements of a matrix)

पक्तियों अथवा स्तम्भों में प्रयुक्त राशियाँ या संख्यायें उस मैट्रिक्स के अवयव कहलाती हैं। प्रत्येक अवयव की स्थिति उस अवयव के पादांक (subscript) युग्म से प्रदर्शित होती है। युग्म का पहला अक्षर या अंक पंक्ति तथा द्वितीय अक्षर या अंक स्तम्भ की संख्या को प्रदर्शित करता है। जैसे अवयव aij में i उसकी पंक्ति व j उसके स्तम्भ को सूचित करते हैं, जैसे a_{23} का आशय है कि यह अवयव पंक्ति 2 और स्तम्भ 3 में स्थित है। इसी प्रकार a_{mn} पंक्ति m व कॉलम n में स्थित अवयव है।

मैट्रिक्स का क्रम (order of a matrix)

यदि किसी मैट्रिक्स में m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ हों तो इसे m x n (m by n) क्रम की मैट्रिक्स कहते हैं। मैट्रिक्स का क्रम लिखने में पहले पंक्तियों की संख्या तथा फिर स्तम्भों की संख्या लिखी जाती है।

जब m n संख्यायें m पंक्तियों और n स्तम्भों में एक सुनिश्चित क्रम में व्यवस्थित हों तो इन संख्याओं की मैट्रिक्स, माना कि A, को निम्न प्रकार लिखते हैं

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \text{.........} a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \text{.........} a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \text{.......} a_{mn} \end{bmatrix}$$

यह मैट्रिक्स का व्यापक रूप कहलाता है। संक्षेप में मैट्रिक्स A को निम्न रूप में भी लिखते हैं:

$A_{m \times n}$ या $[a_{ij}]$ जहाँ $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, m$

तथा $j = 1, 2, \ldots.., n$

सदिश या वैक्टर (Vector)

यदि किसी मैट्रिक्स में m पंक्तियाँ और केवल एक स्तम्भ हो तो वह मैट्रिक्स स्तम्भ सदिश (column vector) कहलाता है। इसी प्रकार केवल एक पंक्ति और n स्तम्भ होने पर मैट्रिक्स को पंक्ति सदिश (row vector) कहा जाता है।

$$\underset{(3 \times 1)}{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{(1 \times 4)}{B} = [1 \ 2 \ 5 \ -4]$$

स्तम्भ (कॉलम) वेक्टर पंक्ति वेक्टर

अदिश / स्केलर (Scalar)

एक मैट्रिक्स का अवयव केवल एक वास्तविक संख्या है तो ऐसा मैट्रिक्स अदिश कहलाता है। वैकल्पिक रूप से एक स्केलर 1 x 1 मैट्रिक्स है।

क्रम-परिवर्तन (Transposition)

किसी मैट्रिक्स की पंक्तियों व स्तम्भों का परस्पर फेर-बदल करने पर प्राप्त मैट्रिक्स को पहले मैट्रिक्स का ट्रान्सपोज कहा जाता है। एक m x n मैट्रिक्स का क्रम-परिवर्तन करने पर एक n x m मैट्रिक्स प्राप्त होता है, जिसमें प्रथम पंक्ति प्रथम स्तम्भ, द्वितीय पंक्ति द्वितीय स्तम्भ एवं इसी प्रकार अन्य पंक्तियाँ स्तम्भों में परिवर्तित हो जाती हैं। फलतः ट्रान्सपोज मैट्रिक्स में n पंक्तियाँ और m स्तम्भ होते हैं। साधारणतया ट्रान्सपोज प्राइप (') के निशान से व्यक्त किया जाता है। जैसे

$$\underset{(3 \times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2 \times 3)}{A'} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

चूँकि वैक्टर एक विशेष प्रकार की मैट्रिक्स होते हैं अतः पंक्ति वैक्टर का ट्रान्सपोज स्तम्भ वेक्टर और स्तम्भ वेंक्टर का ट्रांसपोज पंक्ति वेक्टर होता है।

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{एवं} \qquad B' = [2 \quad 3 \quad 4]$$

सबमैट्रिक्स (Submatrix)

यदि m x n क्रम की A मैट्रिक्स दी हुई है। यदि इस मैट्रिक्स में से r पंक्तियाँ और s स्तम्भ का विलोपन कर दिया जाय तो परिणामिक मैट्रिक्स को A मैट्रिक्स की सब मैट्रिक्स कहा जाता है। इस प्रकार यदि

$$\underset{(3 \times 3)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

तो तीसरी पंक्ति व तीसरे स्तम्भ का विलोपन करने पर हमें प्राप्त होती है

$$\underset{(2 \times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

जो A मैट्रिक्स की सब मैट्रिक्स है और जिसका क्रम 2 x 2 है।

11.3 विशेष प्रकार के मैट्रिक्स

मैट्रिक्स बीजगणित की बुनियादी परिभाषाओं को जानने के बाद अब हम विभिन्न प्रकार के आव्यूहों (matrices) के विषय में पढ़ेंगे।

(i) वर्ग मैट्रिक्स (Square Matrix)

एक मैट्रिक्स जिसमें पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या समान हो वर्ग मैट्रिक्स कहलाता है। उदाहरण के लिये A मैट्रिक्स कोटि 2 का और B मैट्रिक्स कोटि 3 का वर्ग मैट्रिक्स है।

$$\underset{(2 \times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{(3 \times 3)}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) विकर्ण मैट्रिक्स (Diagonal Matrix)

वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ में A का मुख्य विकर्ण इस मैट्रिक्स के अवयवों, $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ से बनता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि नीचे दिए गए मैट्रिक्स A के विकर्ण के अवयव a_{ii} हैं, जहाँ $i = 1, 2, \ldots n$ है। ये अवयव A के विकर्ण के अवयव हैं। इन अवयवों से A का मुख्य विकर्ण बनता है। मैट्रिक्स के शेष अवयव (जो विकर्ण पर स्थित नहीं है) अपविकर्ण अवयय (nondiagonal elements) कहलाते हैं दूसरे शब्दों में वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ के अपविकर्ण अवयव a_{ij} हैं जहाँ $i \neq j$। उदाहरण के लिए निम्न दिए हुए A मैट्रिक्स के विकर्ण के अवयव 3, -1, 3 हैं। शेष सब अपविकर्ण अवयव हैं।

$$\underset{(3 \times 3)}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

ऐसा वर्ग मैट्रिक्स जिसमें विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त शेष सब अवयव शून्य हों, विकर्ण मैट्रिक्स कहलाता है। विकर्ण मैट्रिक्स के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

$$\underset{(2 \times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underset{(3 \times 3)}{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(iii) एकांक मैट्रिक्स (Unit Matrix)

एकांक मैट्रिक्स वह विकर्ण मैट्रिक्स है जिसके विकर्ण के सारे अवयव संख्या एक (1) हो। अर्थात् वह वर्ग मैट्रिक्स जिसके मुख्य विकर्ण का प्रत्येक अवयव एक (1) हो तथा अन्य सभी अवयव शून्य (0) हो तो उसे इकाई या एकांक मैट्रिक्स कहते हैं तथा संकेत I से प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{इत्यादि}$$

I_2 व I_3 क्रमशः कोटि 2 तथा कोटि 3 के एकांक मैट्रिक्स हैं।

236

(iv) **शून्य मैट्रिक्स (Zero Matrix or Null Matrix)**

ऐसा मैट्रिक्स जिसके सारे अवयव शून्य हों, शून्य मैट्रिक्स कहलाता है। शून्य मैट्रिक्स को 0 से व्यक्त करते हैं। उदाहरणार्थ

$$\underset{(2 \times 3)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ तथा } \underset{(2 \times 2)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(v) **समान मैट्रिक्स (Equal Matrix)**

यदि दो मैट्रिक्स एक ही क्रम की हों तथा उनके संगत अवयव भी समान हों तो उन्हें समान मैट्रिक्स कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ a & c & d \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ a & c & d \end{bmatrix}$$

तब इन्हें A = B द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(vi) **सममित मैट्रिक्स (Symmetric Matrix)**

यदि किसी मैट्रिक्स की पंक्तियों व स्तम्भों में परस्पर फेर-बदल कर लिया जाय तथा नया मैट्रिक्स पुराने मैट्रिक्स के बराबर निकले तो वह मैट्रिक्स सममित मैट्रिक्स कहलाती है। जैसे

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \text{ तब } A' = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

सममित मैट्रिक्स वर्ग मैट्रिक्स का ही एक विशेष रूप होता है। इसमें मुख्य विकर्ण के दोनों ओर पदों की व्यवस्था एक सी होती है। सामान्य रूप से, $a_{ij} = a_{ji}$ हो तो सममित मैट्रिक्स होगा।

(vii) **शून्य सदिश (Null Vector)**

एक सदिश (स्तम्भ या पंक्ति) जिसके सभी अवयव शून्य हों शून्य सदिश कहलाता है तथा संकेत 0 से प्रकट किया जाता है।

11.4 मैट्रिक्सों पर संक्रियायें (Matrix operations)

आप जानते हैं कि अंकगणित तथा बीजगणित की मुख्य संक्रियायें जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग है। इस भाग में हम मैट्रिक्सों पर इन संक्रियाओं को देखेंगे।

11.4.1 मैट्रिक्सों का जोड़ एवं घटाना

मैट्रिसेज तभी जोड़े या घटाये जा सकते हैं जबकि उनका आयाम एक-सा हो अर्थात् मैट्रिक्स के क्रम समान हों (उनकी पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या समान हो।) A तथा B मैट्रिक्स दोनों का आयाम समान हो। जैसे 2 x 3 तो दोनों को जोड़ा या घटाया जा सकता है (A+B अथवा A-B)

समान क्रम के दो मैट्रिक्सों (A एवं B) का योग प्राप्त करने के लिये A के प्रत्येक अवयव में B के संगत अवयव को जोड़ दिया जाता है। योग करने पर जो मैट्रिक्स प्राप्त होती है उसका क्रम भी वही होता है जो जोड़ी जाने वाली मैट्रिक्सों का है। मैट्रिक्सों के इस योग को A+B द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

मैट्रिक्सों में घटाने की संक्रिया भी जोड़ की संक्रिया के समान ही होती है। घटाने की संक्रिया के लिये भी यह आवश्यक है कि दोनों मैट्रिक्सों A तथा B में पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या क्रमशः समान हो अर्थात् A तथा B दोनों एक ही कोटि के हों। A-B प्राप्त करने के लिए A मैट्रिक्स के प्रत्येक अवयव में से B मैट्रिक्स के संगत अवयव को घटा दिया जाता है।

मैट्रिक्सों में जोड़ तथा बाकी अवयव से अवयव के अनुसार (Element by element) होती है।

उदाहरणार्थ यदि

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

तब $A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} \end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} b_{11}-a_{11} & b_{12}-a_{12} \\ b_{21}-a_{21} & b_{22}-a_{22} \\ b_{31}-a_{31} & b_{32}-a_{32} \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स जोड़ व गुणा निम्न गुणधर्मों का पालन करती है-

1. $A + B = B+A$ (क्रम विनिमेय)
2. $A + (B+C) = (A+B)+C$ (साहचर्य)
3. $A - B \neq B - A$

उदाहरण-1

(क) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} 0+3 & 3+2 & 8-4 \\ -5+5 & -6+6 & 2+8 \\ 0+3 & 0+0 & -4+0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A—B = \begin{bmatrix} 0-3 & 3-2 & 8-(-4) \\ -5-5 & -6-6 & 2-8 \\ 0-3 & 0-0 & -4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 12 \\ -10 & -12 & -6 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(ख) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$$A+B-C = \begin{bmatrix} 2+1-0 & 3+1-0 \\ 6-1-6 & 4+2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ग) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 20 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A-B-C = \begin{bmatrix} 1-0-10 & 4-5-13 \\ 2-7-20 & 6-9-0 \\ 3-11-1 & 8-12-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -14 \\ -25 & -3 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$$

(घ) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A+B-C = \begin{bmatrix} 3+1-2 \\ 1+3-0 \\ -2+4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(ङ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 0-0 & 1-2 & 2-1 \\ 2-1 & 1-1 & 0-0 \\ 1-0 & 2-2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 0-0 & 2-1 & 1-2 \\ 1-2 & 1-1 & 0-0 \\ 0-1 & 2-2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

11.4.2 मैट्रिक्सों की गुणा

दो मैट्रिक्सों का गुणा तब ही किया जा सकता है जब एक मैट्रिक्स में स्तम्भों की संख्या दूसरे मैट्रिक्स में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। यदि हमें A और B दो मैट्रिक्स दिये हों और A B मालूम करना है तो गुणा होने की शर्त यह है कि A मैट्रिक्स में स्तम्भों की संख्या B मैट्रिक्स में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। यदि ऐसा है तो A एवं B को गुणा के लिये अनुरूप (Conformable) अथवा परिभाषित (defined) कहा जाता है। A मैट्रिक्स को B मैट्रिक्स से गुणा करने पर (A B प्राप्त करने के लिये) A को अगुआ या लीड मैट्रिक्स और B को पश्चता या लैग मैट्रिक्स कहा जाता है।

यदि लीड़ मैट्रिक्स m x n क्रम की है और लैग मैट्रिक्स n x p क्रम की तो दोनों को गुणा किया जा सकता है और गुणनफल मैट्रिक्स m x p क्रम की प्राप्त होती है। यहाँ m, A मैट्रिक्स में पंक्तियों की संख्या है और p, B मैट्रिक्स में कॉलमों की संख्या है।

जब दो मैट्रिक्सों को गुणा किया जाता है तो A मैट्रिक्स की प्रथम पंक्ति और B मैट्रिक्स के प्रथम स्तम्भ के अवयवों को क्रमशः, एक को एक से गुणा करके, जोड़ा जाता है-ऐसा योग गुणनफल मैट्रिक्स का एक अवयव होता है, जैसे

$$\underset{(1 \times 3)}{A} = [5 \quad 4 \quad 3] \qquad \underset{(3 \times 1)}{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\,B = [(5 \times 1) + (4 \times 2) + (3 \times 3)]$$

$$= [5+8+9] = [22]_{1 \times 1}$$

एक से अधिक पंक्ति या स्तम्भ होने पर गुणनफल A B प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित चरण हैं:

$$\underset{(3x2)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \underset{(2x2)}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

चूँकि A की कोटि 3x2 तथा B की कोटि 2x2 है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं A के स्तंभों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के समान है। अतः A B, 3x2 कोटि का होगा।

1. A की प्रथम पंक्ति के अवयवों को B के प्रथम स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करें और गुणनफल का योग कर दें।

   $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$

   यह मैट्रिक्स A B की प्रथम पंक्ति का प्रथम अवयव होगा।

2. पुनः A की प्रथम पंक्ति के अवयवों को B के दूसरे स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करके उनका योग निकाले यह प्रथम पंक्ति का दूसरा अवयव होगा $(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$

3. अब मैट्रिक्स A की दूसरी पंक्ति लीजिये। इसके अवयवों को प्रथम स्तम्भ के अवयवों से क्रमशः गुणा करके योग करने पर A B मैट्रिक्स की दूसरी पंक्ति का प्रथम अवयव प्राप्त होगा और दूसरी पंक्ति के अवयवों को क्रमशः दूसरे स्तम्भ के अवयवों से गुणा करने पर A B मैट्रिक्स की दूसरी पंक्ति के अवयव प्राप्त होंगे।

4. इसी प्रकार A मैट्रिक्स की तीसरी पंक्ति के अवयवों को पहले B मैट्रिक्स के प्रथम स्तम्भ के अवयवों से क्रमशः गुणा करके A B मैट्रिक्स की तीसरी पंक्ति का प्रथम अवयव और दूसरे स्तम्भ के अवयवों से गुणा करके योग करके दूसरा अवयव प्राप्त करेंगे।

नया मैट्रिक्स A B इस प्रकार का होगा --

$$A\ B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

उदाहरण-2

2.1 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो तो A B ज्ञात कीजिये।

$$A\ B = \begin{bmatrix} (0x0)+(1x2) & (0x1)+(1x1) & (0x2)+(1x0) \\ (1x0)+(0x2) & (1x1)+(0x1) & (1x2)+(0x0) \\ (0x0)+(1x2) & (0x1)+(1x1) & (0x2)+(1x0) \end{bmatrix}$$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}$

तो A B एवं B A ज्ञात कीजिये।

A मैट्रिक्स का क्रम 3x2 और B मैट्रिक्स का 2x3 है। अतः A B भी और B A दोनों ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$A\ B = \begin{bmatrix} (5x-1)+(-6x0) & (5x8)+(-6x10) & (5x-3)+(-6x-4) \\ (-1x-1)+(0x0) & (-1x8)+(0x10) & (-1x-3)+(0x-4) \\ (0x-1)+(0x0) & (0x8)+(3x10) & (0x-3)+(3x-4) \end{bmatrix}$$

$$\underset{(3x3)}{A\ B} = \begin{bmatrix} -5 & -20 & 9 \\ 1 & -8 & 3 \\ 0 & 30 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B\,A = \begin{bmatrix} (-1\times5)+(8\times-1)+(-3\times0) & (-1\times-6)+(8\times0)+(-3\times3) \\ (0\times5)+(10\times-1)+(-4\times0) & (0\times-6)+(10\times0)+(-4\times3) \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2\times2)}{B\,A} = \begin{bmatrix} -13 & -3 \\ -10 & -12 \end{bmatrix}$$

2.3 दो परिवार A और B हैं। परिवार A में 2 पुरुष, 3 स्त्रियाँ और 4 बच्चे हैं जबकि परिवार B में 1 पुरुष, 1 स्त्री और 3 बच्चे हैं। उनकी कैलोरी की व्यक्तिगत दैनिक आवश्यकता इस प्रकार है- पुरुष 2500, स्त्री 2000 तथा बच्चे 1800 और प्रोटीन की आवश्यकता इस प्रकार है- पुरुष 55 ग्राम, स्त्री 45 ग्राम व बच्चे 35 ग्राम।

उपर्युक्त सूचना को मैट्रिक्सों के रूप में व्यक्त कीजिये। मैट्रिक्स गुणन का प्रयोग करते हुये दोनों परिवारों में से प्रत्येक के लिये कैलोरी और प्रोटीन की कुल आवश्यकता का परिकलन कीजिये।

उपर्युक्त सूचना को दो मैट्रिक्सों के रूप में रखा जा सकता है।

परिवार	पुरुष	स्त्रियाँ	बच्चे
A	2	3	4
B	1	1	3

	कैलोरी	प्रोटीन (ग्राम)
पुरुष	2500	55
स्त्री	2000	45
बच्चे	1800	35

$$\underset{(2\times3)}{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{(3\times2)}{Y} = \begin{bmatrix} 2500 & 55 \\ 2000 & 45 \\ 1800 & 35 \end{bmatrix}$$

प्रत्येक परिवार की कैलोरी व प्रोटीन की कुल आवश्यकता ज्ञात करना है अत X को Y से गुणा करेंगे-

$$XY = \begin{bmatrix} (2\times2500)+(3\times2000)+(4\times1800) & (2\times55)+(3\times45)+(4\times35) \\ (1\times2500)+(1\times2000)+(3\times1800) & (1\times55)+(1\times45)+(3\times35) \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 18200 & 385 \\ 9900 & 205 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{परिवार A} \\ \text{परिवार B} \end{array} \\ \text{कैलोरी} \qquad \text{प्रोटीन} \end{array}$$

मैट्रिक्स गुणा के गुणधर्म (Properties of Matrix Multiplication)

(1) मैट्रिक्स गुणा आवश्यक रूप से क्रम विनिमेय (Commutative) नहीं होता, अर्थात् सामान्यत: AB≠BA इसलिये मैट्रिक्स किस क्रम में गुणा किये जाते हैं यह बहुत महत्वपूर्ण होता है। A B में मैट्रिक्स B को A से पूर्व गुणा किया (pre-multiplied by A)अथवा A को B से बाद में गुणा (post-multiplied B) माना जायगा।

(2) यदि A B और B A दोनों सम्भव हो तो आवश्यक नहीं है कि दोनों मैट्रिक्स समान क्रम के हों। जैसे A मैट्रिक्स m-x n एवं

B मैट्रिक्स n x m हो तो A B मैट्रिक्स m x m होगी जबकि B A n x n क्रम की, अर्थात् भिन्न-भिन्न क्रम की

(3) यदि A एवं B दोनों वर्ग मैट्रिक्स हों, फलतः A B व B A दोनों परिभाषित हों, फिर भी आवश्यक नहीं है कि दोनों मैट्रिक्स समान हों। जैसे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{एवं} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{तब } A\,B = \begin{bmatrix} 4+15 & 7+10 \\ 24+24 & 42+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 17 \\ 48 & 58 \end{bmatrix}$$

$$B\,A = \begin{bmatrix} 4+42 & 20+56 \\ 3+12 & 15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 76 \\ 15 & 31 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $A\,B \neq B\,A$ यदि A व B दोनों वर्ग मैट्रिक्स हों और समान हों तो $A\,B = B\,A$ होगा।

(4) यदि एक पंक्ति वैक्टर को स्तम्भ वैक्टर से बाद में गुणा (post-multiplied) किया जाय तो गुणनफल एक अदिश (Scalar) होगा।

$$\text{यदि } A = 2, 3, 4 \text{ एवं } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\,B = [(2x1)+(3x2)+(4x3)] = [20]$$

(5) यदि एक स्तम्भ वैक्टर को पंक्ति वैक्टर से बाद में गुणा किया जाय तो गुणनफल एक मैट्रिक्स होगी।

$$\text{यदि } \underset{(4x1)}{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{एवं } \underset{(1x4)}{B} = [1 \;\; 7 \;\; 3 \;\; 2\,] \text{ हो तो}$$

$$\underset{(4x4)}{A\,B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 35 & 15 & 10 \\ 2 & 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(6) यदि किसी मैट्रिक्स को स्तम्भ वैक्टर से बाद में गुणा (post-multiplied) किया जाय तो परिणाम स्तम्भ वैकटर होगा।

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{एवं } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ हो}$$

B =

$$\text{तब } A\,B = \begin{bmatrix} (2x1)+(3x2) \\ (4x1)+(5x2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(7) यदि एक पंक्ति वैक्टर को एक मैट्रिक्स से बाद में गुणा किया जाय तो परिणाम एक पंक्ति वैक्टर होगा।

यदि $\underset{(1\times3)}{A} = [1 \quad 2 \quad 4]$ एवं $\underset{(3\times3)}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो

तब A B = (1x1)+(2x2)+(4x0) (1x2)+(2x3)+(4x1) (1x0)+(2x4)+(4x2)

$\underset{(1\times3)}{A\ B} = [5 \quad 12 \quad 16]$

(8) मैट्रिक्स गुणा में सहचारी (Associative) नियम लागू होता है:

(A B) C = A (B C), जहाँ A का क्रम m x n,
B का n x p और C का p x k है।

(9) मैट्रिक्स गुणा में वितरणात्मक नियम (Distributive Law) भी निम्नलिखित रूप में लागू होता है:

A (B+C) = A B + A C (A से पूर्व गुणा करने पर)
(B+C) A = B A + C A (A से बाद में गुणा करने पर)

अभ्यास-

E-1 यदि $A = [2 \quad 14 \quad 6 \quad 4]$ व $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A B व B A ज्ञात कीजिये।

E-2 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिये I A = A I = A

जहाँ I = तत्समक मैट्रिक्स है।

E-3 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो ज्ञात कीजिये $A^2 - 5A$

E-4 यदि A तथा B आव्यूह नीचे दिये हुए हैं:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A B और B A का मान निकालिए और सिद्ध कीजिए कि

$A\ B = B\ A = I_3$

E-5 यदि A, B तथा X आव्यूह नीचे दिये हुए हैं-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

यदि X = A B हो तो x_1, x_2 व x_3 के मूल्य ज्ञात कीजिए।

11.5 आव्यूह (मैट्रिक्स) का पक्षान्तरण (Matrix Transposition)

आपको पहले बताया जा चुका है कि जब एक मैट्रिक्स A की पंक्तियों और स्तम्भों को अर्न्तपरिवर्तित कर दिया जाता है अर्थात् पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाता है तो ऐसा बना आव्यूह A का **पक्षान्तरणित** कहलाता है। इसको A' या A^T से सूचित किया जाता है। **पक्षान्तरण** करने के लिये आव्यूह A में पंक्तियों और स्तम्भों में इस प्रकार परिवर्तन किया जाता है कि प्रथम पंक्ति प्रथम स्तम्भ, द्वितीय पंक्ति द्वितीय स्तम्भ, तृतीय पंक्ति तृतीय स्तम्भ बन जाता है। इसी प्रकार प्रथम स्तम्भ प्रथम पंक्ति और द्वितीय स्तम्भ द्वितीय पंक्ति बन जाता है। जैसे

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \quad \text{तब } A^1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \end{bmatrix}$$

अतएव परिभाषा के अनुसार, m x n क्रम के आव्यूह का पक्षान्तरणित n x m क्रम या आव्यूह (Matrix) होगा।

पक्षान्तरण संबंधी कुछ प्रमुख प्रमेय निम्नलिखित हैं:-

(i) एक पक्षान्तरणित या क्रम- परिवर्तित आव्यूह (A^1) का पक्षान्तरण मूल आव्यूह (A) ही होगा।

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{तब } A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^1)^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

(ii) दो आव्यूह A तथा B के योग का पक्षान्तरण उनके अलग-अलग पक्षान्तरण के योग के बराबर होता है।

इस प्रकार $(A+B)^1 = A^1+B^1$

(iii) गुणनफल A B का पक्षान्तरण, उत्क्रम (reverse order) में पक्षान्तरणों के गुणनफल के बराबर होता है। जैसे- यदि A B परिभाषित हैं तो $(A\ B)^1 = B^1\ A^1$ और $(A\ B\ C\ D)^1 = D^1\ C^1\ B^1\ A^1$ होगा।

(iv) इकाई या तत्समक आव्यूह (मैट्रिक्स) का पक्षान्तरण करने पर इकाई मैट्रिक्स ही प्राप्त होती है जैसे $I^1 = I$

(v) एक अदिश (स्केलर) का पक्षान्तरण अदिश स्वयं होता है। इस प्रकार λ एक अदिश है तो $\lambda^1 = \lambda$

(vi) जहाँ λ एक अदिश हो तो $(\lambda A)^1 = \lambda A^1$ है।

(नोटः $(\lambda A)^1 = \lambda^1 A^1 = A^1 \lambda = \lambda A^1$)

(vii) यदि A एक ऐसा वर्ग मेट्रिक्स है जहाँ $A = A^1$ हो तो A एक सममित आव्यूह है।

उदाहरण–3

3.1

यदि $A\ (2x3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो A^1 ज्ञात कीजिये।

$$A^1\ (3x2) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2

यदि $A\ (3x3) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ हो तो A^1 ज्ञात कीजिये

$$A^1\ (3x3) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3.3

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

एवं $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 25 \end{bmatrix}$ हो तो दिखाइये कि $(A+B+C)^1 = A^1+B^1+C^1$

$$(A+B+C) = \begin{bmatrix} 3 -1 +0 & 0 +6 +0 & 2 -2 +6 \\ -6 +3 -2 & 8 -2 +5 & -1 +1+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -5 & 11 & 25 \end{bmatrix}$$

$$(A+B+C)^1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 11 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^1+B^1+C^1 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^1+B^1+C^1= \begin{bmatrix} 3 & -1 & +0 & -6 & +3 & -2 \\ 0 & +6 & +0 & 8 & -2 & +5 \\ 2 & -2 & +6 & -1 & +1 & +25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 11 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $A^1+B^1+C^1 = (A+B+C)^1$

3.4 यदि $\underset{(2x2)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$; $B\ (2x3) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

हो तो दिखाइये कि $[A\ B\ C]^1 = C^1\ B^1\ A^1$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+0 & 15\ -0 & -21+0 \\ -12-0 & -20\ +1 & +28-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 15 & -21 \\ -12 & -19 & 20 \end{bmatrix} \quad 2x3$$

$$A\ B = \begin{bmatrix} (9x6)+(15x-1)+(-21x0) \\ (-12x6)+(-19x-1)+(20x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ -53 \end{bmatrix}$$

$[A\ B\ C]^1 = [39\ -\ 53]$

$$C^1\ B^1\ A^1 = [6\ -1\ 0] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$C^1\ B^1 = [(6x3)+(-1x5)+(0x-7) \quad (6x0)+(-1x-1)+(0x8)]$

$C^1\ B^1 = [13 \quad 1]$

$C^1\ B^1\ A^1 = [(13x3)+(1x0) \quad (13x-4) + (1x-1)] = [39\ -\ 53]$

इस प्रकार $[A\ B\ C]^1 = C^1\ B^1\ A^1$

3.5 यदि $A = [3\ -1\ 0]$; $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ एवं $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

हो तो दिखाइये कि $[A\ B\ C]^1 = C^1\ B^1\ A^1$

$A\ B = [3x6+(-1x-7)+(0x0) \quad (3x0)+(-1x2)+(0x3)]$

$A\ B = [25\ -\ 2]$

$A\ B\ C = [(25x0) + (-2x1)] = [-2]$

$[A\ B\ C]^1 = [-2]$ (अदिश का पक्षान्तरण अदिश स्वयं होता है।)

$$C^1B^1A^1 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [(0x6)+(1x0) \quad (0x\text{-}7) + (1x2) \quad (0x0)+(1x3)] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [(0x3)+(2x\text{-}1)+(3x0)]$$

$$= [-2]$$

इस प्रकार $[A\ B\ C]^1 = C^1B^1A^1$

11.6 मैट्रिक्स (आव्यूह) का प्रतिलोम (The Inverse of a Matrix)

(मैट्रिक्स का प्रतिलोम ज्ञात करने के लिए सारणिक का ज्ञान आवश्यक है। अतः इस खण्ड को प्रारम्भ करने से पूर्व आप इकाई 14 में सारणिक का अध्ययन करें।)

युगपत एक रेखीय समीकरणों को हल करने, आदाप्रदा विश्लेषण एवं अन्य विश्लेषणों में मैट्रिक्स के प्रतिलोम का उपयोग किया जाता है। मैट्रिक्स A के प्रतिलोम को A^{-1} से सूचित किया जाता है।

यदि A मैट्रिक्स, nxn क्रम का एक वर्ग मैट्रिक्स को nxn क्रम के दूसरे वर्ग मैट्रिक्स B से गुणा करने पर गुणनफल इकाई मैट्रिक्स हो तो B मैट्रिक्स को A का प्रतिलोम या व्युत्क्रम कहा जावेगा।

यदि $A_{nxn} \ B_{nxn} = I_{n} = B_{nxn} \cdot A_{nxn}$ हो तो $B = A^{-1}$ होगा।

A^{-1} को निम्न तीन में से किसी भी प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$B = A^{-1} = [a_{ij}]^{-1} = [a^{ij}]$$

किसी भी मैट्रिक्स का प्रतिलोम तब ही ज्ञात किया जा सकता है जब उस मैट्रिक्स का सारणिक मूल्य शून्य न हो ($|A| \neq 0$)। यदि $|A| = 0$ हो तो ऐसे मैट्रिक्स को अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स कहते हैं। अर्थात् केवल उसी मैट्रिक्स का प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है जो वर्ग मैट्रिक्स हो और उसका सारणिक मान अशून्य हो।

किसी मैट्रिक्स का व्युत्क्रम निम्न प्रकार निकाला जाता है-

(i) आव्यूह A के अवयवों a_{ij} को सहखण्डों से प्रतिस्थापित करेंगे। ऐसा करने पर हमें सहखण्ड (cofactors) मैट्रिक्स प्राप्त होगी।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{अतः } |A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

248

$$|A| = 0+(-2)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} +(-3)(+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 0+2-3 = -1$ (सारणिक का मान अशून्य है अतः प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है)

A मैट्रिक्स की सहखण्ड मैट्रिक्स =

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ (-)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-6+6) & (-2+3) & (-2+3) \\ -(4-6) & (0-3) & -(0-2) \\ (-6+9) & -(0+3) & (0+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) अब हम सहखण्ड मैट्रिक्स का पक्षान्तरण करेंगे। पक्षान्तरण करने पर प्राप्त मैट्रिक्स को A का सहखंडज (adjugate or adjoint) कहते हैं।

$$\text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii) A के सहखंडज में $|A|$ का भाग देने पर A का प्रतिलोम प्राप्त होगा।

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. }(A)}{|A|} \quad \text{अथवा} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(iv) अपनी गणना की शुद्धता की जाँच करने के लिये $A\,A^{-1}$ अथवा $A^{-1}A$ ज्ञात करेंगे, क्योंकि $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0-2+3) & (0-6+6) & (0-6+6) \\ (0+3-3) & (-2+9-6) & (-3+9-6) \\ (0-2+2) & (2-6+4) & (3-6+4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

प्रतिलोम (व्युत्क्रम) मैट्रिक्स के गुणधर्म (Properties of Inverse Matrices)

(i) यदि A तथा B दो समान क्रम के अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो A B भी अव्युत्क्रमणीय है।

(ii) दो आव्यूहों के गुणनफल का व्युत्क्रम, उल्टे क्रम में उन आव्यूहों के व्युत्क्रम का गुणनफल होता है-

$(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

इसी प्रकार $(A\ B\ C)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

उपपत्ति - $(A\ B)\ (B^{-1}\ A^{-1}) = A\ (B\ B^{-1})\ A^{-1}$

$= A\ I\ A^{-1} = I$

(iii) A मैट्रिक्स के प्रतिलोम व A मैट्रिक्स को गुणा करने पर इकाई या तत्समक मैट्रिक्स प्राप्त होती है।

$A^{-1}A = I$

उपपत्ति - $(A^{-1})\ (A^{-1})^{-1} = I$

दोनों ओर A से गुणा करने पर

$A\ A^{-1}\ (A^{-1})^{-1} = AI$

$I\ (A^{-1})^{-1} = AI$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$\therefore\ (A^{-1})\ (A^{-1})^{-1} = I$

$A^{-1}A = I$

(iv) A मैट्रिक्स के परिवर्त (Transpose) का प्रतिलोम, प्रतिलोम के परिवर्त के बराबर होता है। अर्थात प्रतिलोम की और क्रम-परिवर्तन (पक्षान्तरण) की संक्रियायें परस्पर क्रम विनिमययुक्त होती है।

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

उपपत्ति - $A\ A^{-1} = I$

क्रम परिवर्तन करने पर $(A^{-1})^T\ A^T = I$

$(A^T)^{-1}$ से उत्तर गुणा करने पर

$(A^{-1})^T\ A^T\ (A^T)^{-1} = I\ (A^T)^{-1}$

अतएव $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(v) मैट्रिक्स A के प्रतिलोम का सारणिक मान A के सारणिक मान का व्युत्क्रम होता है -

$$|A^{-1}| = \frac{I}{|A|}$$

उपपत्ति - हमें ज्ञात है कि

$$A^{-1}A = I$$

$$\therefore |I| = 1 = |A^{-1}A| = |A^{-1}| \; |A|$$

अथवा $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

उदाहरण-4

4.1 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} बताइये।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj (A)}$$

a_{ij} के स्थान पर संगत सहखण्ड रखने पर

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (सहखण्ड मैट्रिक्स का परिवर्त)

एवं $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1(36-25)-2\ (12-5)+3\ (5-3)$

$$= 11-14+6 = 3$$

अतएव $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 1/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$

4.2 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिये और सिद्ध कीजिये कि $A\,A^{-1} = I$ है।

सर्वप्रथम A मैट्रिक्स का सारणिक मान ज्ञात करेंगे -

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(21-4)-2(15-8)+3(5-14)$$

$$= 17-14-27 = -248$$

अब हम A मैट्रिक्स का सहखण्ड मैट्रिक्स C प्राप्त करेंगे -

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & -7 & -9 \\ -3 & -3 & 3 \\ -13 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

अब हम सहखण्ड मैट्रिक्स का परिवर्त जिसे Adj A कहा जाता है प्राप्त करेंगे -

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -13 \\ -7 & -3 & 11 \\ -9 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

अब हम Adj A के अवयवों में $|A|$ के मान (-24) का भाग देकर A^{-1} ज्ञात करेंगे -

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj } A = \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} 17 & -3 & -13 \\ -7 & -3 & 11 \\ -9 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\ 7/24 & 1/8 & 1\ 3/24 \\ 7/24 & 1/8 & -1\ 1/24 \\ 3/8 & -1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

यह सिद्ध करने हेतु कि $A\ A^{-1} = I$ है हम A का A^{-1} से उत्तर-गुणन करेंगे-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ एवं } A^{-1} = \begin{bmatrix} -17/24 & 1/8 & 13/24 \\ 7/24 & 1/8 & -11/24 \\ 3/8 & -1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$A\ A^{-1} = \begin{bmatrix} (1x\text{-}17/24)+(2x7/24)+(3x3/8 & (1x1/8)+(2x1/8)+(3x\text{-}1/8) & (1x13/24)+(2x\text{-}11/24)+(3x1/8) \\ (5x\text{-}17/24+(7x7/24)+(4x3/8) & (5x1/8)+(7x1/8)+(4x\text{-}1/8) & (5x13/24)+(7x\text{-}11/24)+(4x1/8) \\ (2x\text{-}17/24)+(1x7/24)+(3x3/8) & (2x1/8)+(1x1/8)+(3x\text{-}1/8) & (2x13/24)+(1x\text{-}11/24)+(3x1/8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

अभ्यास

E-6 निम्न आव्यूहों का सारणिक मान ज्ञात कीजिये और जहाँ सम्भव हो प्रतिलोम ज्ञात करें।

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

E-7 यदि $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ एवं $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तो $(I\text{-}A)^{-1}$ ज्ञात करें।

E-8 यदि $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिये $A\ A^{-1} = I$

E-9 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) A^1, B^1 एवं C^1 ज्ञात कीजिये

(b) सिद्ध कीजिये कि $(A+B)^1 = A^1+B^1$

(c) सिद्ध कीजिये कि $(A\ B)^{1} = B^{1}\ A^{1}$

E-10

यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $Adj\ A = 3A^{T}$

11.7 युगपत समीकरणों का हल (Solution of Simultaneous linear Equations)

युगपत एक रेखीय समीकरणों के एक समुच्चय को हल करने की अनेक विधियाँ हैं जो अनन्य (unique) हल प्रदान करती हैं। मैट्रिक्स विधि से भी यह हल ज्ञात किया जा सकता है।

युगपत समीकरणों का समुच्चय है -

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

इन युगपत समीकरणों को क्रेमर के नियम के अनुसार आव्यूह के रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है -

$$Ax = K$$

जहां A = गुणांक a_{ij} का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

x = चरो का स्तम्भ सदिश = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

k = अचरों का स्तम्भ सदिश = $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

$Ax = k$ को A^{-1} से पूर्व गुणान करने पर

$A^{-1}\ Ax = A^{-1}k$

अथवा $x = A^{-1}k$

अथवा $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \dfrac{I}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & k_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & k_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & k_3 \end{bmatrix}$

यहां C_{ij} a_{ij} के संगत सहखण्ड हैं।

अतएवं

$$x_1 = \frac{c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + c_{13}k_3}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + c_{23}k_3}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{c_{31}k_1 + c_{32}k_2 + c_{33}k_3}{|A|}$$

इस प्रकार युगपत समीकरणों का हल ज्ञात करने की क्रिया विधि निम्न होगी :-

(1) सर्वप्रथम गुणांकों के आव्यूह A की सारणिक $|A|$ का मान ज्ञात करेंगे। यदि सारणिक मान अशून्य हो तो हल ज्ञात किया जा सकता है।

(2) फिर गुणांकों के मैट्रिक्स (आव्यूह) का प्रतिलोम A^{-1} ज्ञात करेंगे।

(3) प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} को अचरों की स्तम्भ मैट्रिक्स k से गुणा करेंगे।

(4) इस प्रकार प्राप्त गुणान मैट्रिक्स की पंक्तियों के अवयव ही x_1, x_2 एवं x_3 के अभीष्ट मान होंगे।

उदाहरण - 5 मैट्रिक्स सिद्धान्त से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिये :-

$$3x + y - z = 2$$
$$x - 2y + z = -9$$
$$4x + 3y + 2z = 1$$

गुणाकों का मैट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A$

अज्ञात राशियों का मैट्रिक्स स्तम्भ $= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x$

अचरों का स्तम्भ मैट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} = k$

इसी समीकरण निकाय को निम्न मैट्रिक्स समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है :

$Ax = k \Rightarrow x = A^{-1}k$

A^{-1} ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम $|A|$ का मान ज्ञात करेंगे :-

$$|A| = 3\,(-4-3) - 1\,(2-4) - 1\,(3+8)$$
$$= -21+2-11 = -30 \neq 0$$

अतः A^{-1} ज्ञात किया जा सकता है।

A मैट्रिक्स की सहखण्ड मैट्रिक्स =

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ (-)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & +2 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

सहखण्ड मैट्रिक्स का परिवर्त या Adj A = $\begin{bmatrix} -7 & -5 & -1 \\ +2 & 10 & -4 \\ 11 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj}^{\cdot} A = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -7 & -5 & -1 \\ +2 & 10 & -4 \\ 11 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/30 & 1/6 & 1/30 \\ -1/15 & -1/3 & 2/15 \\ -11/30 & 1/6 & 7/30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -7 & -5 & -1 \\ 2 & 10 & -4 \\ 11 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7/30 \times 2) + (1/6 \times -9) + (1/30) \\ (-1/15 \times 2) + (-1/3 \times -9) + (2/15 \times 1) \\ (-11/30 \times 2) + (1/6 \times -9) + (7/30 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

समान समीकरण की परिभाषा से $x = -1;\ y = 3;\ z = -2$

अभ्यास :

E -11 मैट्रिक्स सिद्धांत से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिये :-

(a) $x + y + 2z = 4$
$2x - y + 3z = 9$
$3x - y - z = 2$

(b) $x_1 - 4x_2 = -1$
$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + x_3 = 3$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

(d) $x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$

11.8 मैट्रिक्स (आव्यूह) पृथक्करण (Partitioned Matrices)

एक आव्यूह को उप-आव्यूहों (Sub-matrices) में पृथक करना कई बार सुविधाजनक होता है। आव्यूह संख्याओं का एक आयताकार अंकायत है। इसको क्षैतिक तथा ऊर्ध्वाधर रेखाओं से उप-आव्यूहों के अंकायत में पृथक कर सकते हैं। इन उप-आव्यूहों को मूल आव्यूह पर संक्रियाये करने हेतु अदिश (स्कैलर) के रूप में प्रयुक्त किया जा सकता है।

जैसे 3x3 क्रम के A मैट्रिक्स का चार उप-आव्यूहों में पृथक्करण किया जा सकता है :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}_{2x1}$$

$$A_{21} = [a_{31} \quad a_{32}]_{1x2} \qquad A_{22} = [a_{33}]_{1x1}$$

अब आव्यूह A को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :-

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

एक MxN क्रम के आव्यूह का निम्नानुसार पृथक्करण किया जा सकता है :-

$$A = (A_1 :: A_2)$$

जहां A_1 का क्रम MxN_1 है, A_2 का क्रम MxN_2 है एवं $N_1+N_2 = N$ है।

एक विभक्त (partitioned) आव्यूह के परिवर्त को उप-आव्यूहों के परिवर्त के रूप में लिखा जा सकता है, यथा

$$A^1 = \begin{bmatrix} A^1{}_1 \\ A^1{}_2 \end{bmatrix}$$

$$A = [A_1 : A_2] = \left[\begin{array}{cc:cc} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

तब $$A^1 = \begin{bmatrix} A_1^1 \\ \hline A_2^1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \\ \hdashline 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -7 \end{array}\right]$$

यदि आव्यूह को अनुरूप विभक्त किया गया है, तो विभक्त आव्यूहों को जोड़ा, घटाया या गुणा किया जा सकता है। यदि MxN क्रम के A आव्यूह का पृथक्करण $A = [A_1 : A_2]$ है, जहां A_1 का क्रम MxN_1 तथा A_2 का क्रम MxN_2 है एवं $N_1+N_2 = N$ है और B का पृथक्करण $B = [B_1 : B_2]$ है, जहां B_1 का क्रम MxN_1, B_2 का क्रम MxN_2 है और $N_1+N_2 = N$ हैं।

तब

$$A \pm B = [A_1 \pm B_1 : A_2 \pm B_2]$$

इसी प्रकार

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{bmatrix}$$

जहां A का क्रम MxN , A_1 का $M_1 x N$

A_2 का M_2xN है और $M_1+M_2 = M$ है

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$$

जहां B का क्रम MxN है, B_1 का क्रम M_1xN है, B_2 का क्रम M_2xN है और $M_1+M_2 = M$ है।

तब

$$A \pm B = \begin{bmatrix} A_1 \pm B_1 \\ \hline A_2 \pm B_2 \end{bmatrix}$$

पृथक्करण का उपयोग जोड़ने एवं घटाने में बहुतायत से किया जाता है, परन्तु गणान क्रिया में सुविधा की दृष्टि से पृथक्करण मैट्रिक्स गुणा एवं अन्य जटिल संक्रियाओं में अधिक उपयोगी है।

यदि A आव्यूह (मैट्रिक्स) जिसका क्रम MxN है, का पृथक्करण किया जाता है जहां $A = [A_1 : A_2]$ है, A_1 का क्रम MxN_1, A_2 का क्रम MxN_2 है और $N_1+N_2 = N$ है। एक विभक्त आव्यूह B का क्रम NxP है। $B = B_1/B_2]$ है जहां B_1 का क्रम N_1xP, B_2 का क्रम N_2xP है तब

$$AB = [A_1 : A_2] \left[\frac{B_1}{B_2}\right] = A_1B_1 + A_2B_2$$

उदाहरण - 6

यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ है तो}$$

दिखाइये कि (i) $A+B = (A_1 : A_2) + (B_1 : B_2)$

(ii) $AB = [A_1 : B_1] + [A_2 : B_2]$

आव्यूह पृथक्करण का उपयोग कीजिये।

हल :-

(i) $A+B = (A_1 : A_2) + (B_1 : B_2)$

$$= \left|\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc:c} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right|$$

$$[A_1+B_1 : A_2+B_2] = \left[\begin{array}{cc:c} -2 & -8 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = A+B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

अथवा

$$A+B = \left[\frac{A_1}{A_2}\right] + \left[\frac{B_1}{B_2}\right]$$

$$= \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ \hline 2 & 3 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{bmatrix} A_1+B_2 \\ \hline A_2+B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} -2 & -8 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = A+B$$

(ii) $AB = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ \hline 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

$= [A_1 \ : \ A_2] \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$

$= [A_1 \ B_1] \quad + \quad [A_2 \ B_2]$

$= \begin{bmatrix} (-3-4) & (-6-8) & (2+2) \\ (-3+4) & (-6+8) & (2-2) \\ (3 \ \ -2) & (6-4) & (-2+1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & -14 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -20 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} (-3-4-4) & (-6-8-6) & (2+2+0) \\ (-3+4+2) & (-6+8+3) & (2-2+0) \\ (3-2+0) & (6-4+0) & (-2+1+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -20 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

इस प्रकार $AB = [A_1B_1] + [A_2B_2]$

उदाहरण - 7

यदि $A = \begin{matrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{matrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

तब

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ \hline -5 & 1 \end{array}\right]$

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [-5 \ \ -1]$

$AB = \begin{bmatrix} 24+0 \\ 4+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12+0 \\ 2-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 13 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

उत्तर की जांच प्रत्यक्ष गुणान द्वारा की जा सकती है

$AB = \begin{bmatrix} 24+0+5 & 12+0+1 \\ 4+0-10 & 2-3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 13 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

अभ्यास :

E-12 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ है तो दिखाइयें कि $A^2 = 0$ हैं।

आव्यूह पृथक्करण द्वारा उत्तर की जांच कीजिये।

E-13 यदि

$U = [1 \quad 0 \quad 1]$, $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो ज्ञात कीजिये

(a) UV

(b) VU+X

(c) XY

अपने उत्तर की जांच आव्यूह पृथक्करण द्वारा करें।

11.9 (आव्यूह) मैट्रिक्स का अनुस्थित या कोटि (Rank of Matrix)

एक वर्ग आव्यूह के अवयवों से बने सारणिक का मान शून्य हो तो उसे अव्युत्क्रमणीय अव्यूह (Sigular Matrix) कहते हैं। अर्थात्, $|A| = 0$ हो। यदि $|A| \neq 0$ है तो ऐसा वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-Singular Matrix) कहा जाता है।

A मैट्रिक्स में उच्चतम क्रम के व्युत्क्रमणीय उप-आव्यूह के क्रम को आव्यूह का अनुस्थित या कोटि कहते हैं और इसे r (A) द्वारा बताया जाता है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

यहां $|A| = 4\ (54-56) - 5\ (45-49) + 6\ (40-42) = 0$

A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है। लेकिन A आव्यूह के उप-आव्यूह $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ का सारणिक मान अशून्य है (-1), अतः A आव्यूह की कोटि (अनुस्थित) -2 है।

उदाहरण-7

निम्न आव्यूहों की कोटि निर्धारित कीजिये :-

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

हल :

(a) इस आव्यूह के तीन वर्ग-उपआव्यूह संभव है

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

इन उप आव्यूहों का सारणिक मान क्रमशः -10, -10 एवं -20 है, जो अशून्य है अतः आव्यूह की कोटि 2 है।

(b) इस आव्यूह का सारणिक मान

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\ (4-3) + 1\ (-2-0) = 1-2 = 1$$

अर्थात अशून्य है अतः आव्यूह की कोटि 3 है।

(c) इस आव्यूह का सारणिक मान शून्य है

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-6 = 0$$

अतः आव्यूह की कोटि एक है।

(d) इस आव्यूह का सारणिक मान

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\ (5-12)\ -1\ (2+16)\ -2\ (6+20)$$

$= -21-18-52 = -91$ है

अतः आव्यूह की कोटि 3 है।

(e) इस आव्यूह का सारणिक मान शून्य है क्योंकि द्वितीय पंक्ति के संगत अवयव प्रथम पंक्ति के अवयवों से दुगने हैं। इसी प्रकार 2x2 क्रम के सभी उप-आव्यूहों का सारणिक मान भी शून्य है। अतः आव्यूह की कोटि एक है।

किसी आव्यूह की कोटि (Rank) निर्धारित करने में निम्न गुणधर्म उपयोगी होंगे :-

(1) चूंकि विकर्ण मैट्रिक्स का सारणिक मान इसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के गुणानफल के बराबर होता है, अतः विकर्ण मैट्रिक्स की कोटि मुख्य विकर्ण में अशून्य अवयवों की संख्या के बराबर होगी।

(2) चूंकि A^1 का कोई भी उप-आव्यूह A के उपआव्यूह का पक्षान्तरणित (Transpose) होता है एवं $|B| = |B^1|$, अतः $r\ (A^1) = r\ (A)$

(3) दो आव्यूहों के गुणनफल की कोटि, दो मैट्रिक्सों में से जिसकी कोटि कम है उसकी कोटि से अधिक नहीं हो सकती, अर्थात $r\ (AB) \leq \min \{r\ (A),\ r\ (B)\}$

(4) यदि A आव्यूह nxn क्रम का एक वर्ग आव्यूह है तो इसकी कोटि n $(r\ (A) = n)$ होगी, बशर्ते कि यह व्युत्क्रमणीय हो $(|A| \neq 0)$

(5) किसी भी आव्यूह की कोटि कम से कम एक होती है, बशर्ते कि वह शून्य आव्यूह (Null Matrix) न हो। शून्य आव्यूह की कोटि शून्य होगी।

अभ्यास :

E-12 निम्न आव्यूहों की कोटि बताइये :-

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix} 6 & -10 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11.10 सारांश

1. एक आयताकार अंकायत जिसे पंक्तियों तथा स्तम्भों में व्यवस्थित किया गया हो, आव्यूह (मैट्रिक्स) कहलाता है।

2. अंकगणित एवं बीजगणित की मुख्य संक्रियायें जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग आव्यूह बीजगणित में विशेष विधि से सम्पादित की जाती है।

3. दो मैट्रिक्स तभी जोड़े अथवा घटाये जा सकते हैं जब इनका क्रम समान हो। जोड़ व घटाने की क्रिया अवयव से अवयव के अनुसार होती है।

4. मैट्रिक्स A का B से उत्तर-गुणान तब ही किया जा सकता है जब A में स्तम्भों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

5. यदि किसी वर्ग मेट्रिक्स का सारणिक मूल्य अशून्य है तो इसका प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है। मूल मैट्रिक्स को इसके प्रतिलोम से गुणा करने पर इकाई मैट्रिक्स प्राप्त होती है।

6. मैट्रिक्स बीजगणित द्वारा एक रेखीय युगपत समीकरणों के समुच्चय को सरलता से हल करके अनन्य हल प्राप्त किया जा सकता है।

7. आव्यूह पृथक्करण मैट्रिक्स गुणा एवं अन्य जटिल संक्रियाओं में काफी उपयोगी है।

11.11 हल और उत्तर

E-1 AB = [26]

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 28 & 12 & 8 \\ 6 & 42 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

E-3 $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

E-4 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E-5 $x_1 = 13;\ x_2 = 1;\ x_3 = 5$

$$AB = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

E-6 (a) सारणिक मान = 10

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/10 & -1/10 & -11/10 \\ -3/10 & -1/10 & -1/10 \\ -2/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

(b) सारणिक मान = 2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & -3/2 & -4 \\ -7/2 & 3/2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) सारणिक मान = 24

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

E-7

$$\begin{bmatrix} 55/32 & 25/32 & 5/8 \\ 85/96 & 155/96 & 5/8 \\ 35/64 & 45/64 & 25/16 \end{bmatrix}$$

E-8 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$

E-9 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; $C^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

E-11 (a) $x=1,\ y=-1,\ z=2$

(b) $x_1=1,\ x_2=½,\ x_3=2$

(c) $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$

(d) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=3$

E-12 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) [4]

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11.12 शब्दावली

मैट्रिक्स/आव्यूह	Matrix
सारणिक	Determinants
स्तम्भ	Column
एक धाती समीकरण	Linear equation
प्रतीक	Symbol
सूत्रीकरण	Formulation
संकेतन	Notation
प्रतिलोम/व्युत्क्रम	Inverse
पादांक/पादाक्षर	Subscript
क्षैतिज	Horzontal
ऊर्ध्वाधर/उदग्र	Vertical
स्तम्भ मैट्रिक्स	Column Matrix
पंक्ति मैट्रिक्स	Row Matrix
सदिश/वेक्टर	Vector
मुख्य विकर्ण	Principal diagonal
क्रम विनिमेय	Commutative
सहचारी	Associative
गुणांक	Coefficient
विकर्ण मैट्रिक्स	Diagonal Matrix
संगत अवयव	Corresponding element
अनुरूप	Conformable
अगुआ मैट्रिक्स	Lead Matrix
पश्चता मैट्रिक्स	Lag Matrix
वर्ग आव्यूह मैट्रिक्स	Square Matrix
पक्षान्तरण/क्रम-परिवर्तन	Transposition
सहखण्ड	Co-factor
सहखंडज	Adjoint
आव्यूह प्रथक्करण	Partition of Matrices
संक्रियायें	Operations

पूर्व-गुणान	Pre-multiplication
उत्तर-गुणान	Post-multiplication
उत्क्रम	Reverse order
अदिश/स्केलर	Scalar
अंकायत	Arrays

11.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Weber, Jean E, Mathematical Analysis - Business and Economics Applications, Harper, 1982, Chapter-7.

2. Chiang, A.C., Fundamental Methods of Mathematical Economics, Mcgraw-Hill, 1984, Chapters 4-5

3. Mehta, B.C. and Madnani, Y.M.K., Mathematics for Economists, Sultan Chand, 1988, Chapter-3

4. लक्ष्मीनारायण नाथूरामका, अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग, कॉलेज बुक हाउस, 1989, अध्याय-11

इकाई - 12

सारणिक (The Determinants)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

— सारणिक की संकल्पना को समझ जावेंगे।

— सारणिक व मैट्रिक्स के अंतर को समझ सकेंगे।

— सारणिक के मुख्य गुणधर्मों को जान सकेंगे।

— सारणिक का मूल्यांकन कर सकेंगे।

— सारणिक का प्रयोग करके रैखिक समीकरण निकायों का अनन्य हल ज्ञात कर सकेंगे।

12.1 प्रस्तावना

प्रत्येक वर्ग-मैट्रिक्स A से संबंधित एक संख्या होती है जिसे मैट्रिक्स का सारणिक कहा जाता है। इसे det A अथवा चिह्न $|A|$ से सूचित किया जाता है। जहां $|\ |$ का तात्पर्य 'का सारणिक' (**The determinant of**) होता है। एक मैट्रिक्स का कोई संख्यात्मक मूल्य नहीं होता जबकि एक मैट्रिक्स का सारणिक एक संख्या होती है। सारणिक केवल वर्ग मैट्रिक्स के लिए ही परिभाषित होते हैं। इस इकाई में हम जानेंगे कि सारणिक क्या हैं? सारणिक व मैट्रिक्स में अंतर को समझेंगे और सारणिक का प्रयोग रैखिक समीकरण निकायों को हल करने के लिए करेंगे। युगपत समीकरणों के समुच्चय में अधिक समीकरणों के होने पर बीजगणित की सामान्य विधियों से हल करना कठिन हो जाता है। अतः ऐसे समीकरणों का हल सारणिक की विशेष विधि से किया जाता है।

12.2 सारणिक की संकल्पना

सारणिक केवल वर्ग-आव्यूहों के लिए ही परिभाषित होते हैं, जैसे 2x2, 3x3, 4x4 तथा nxn आयाम के आव्यूहों (मैट्रिक्सों) के लिए ही सारणिक ज्ञात किये जा सकते हैं।

एक 2x2 मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

का सारणिक det $A = |A| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ द्वारा बताया जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है तब $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\,(-1) - 0\,(4) = -3$

यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ है तब $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -1(10)-0\,(6) = -10$

इस प्रकार $|A|$ प्राप्त करने के लिए A के मुख्य विकर्ण के दो अवयवों को गुणा करके उसमें से अन्य दो अवयवों को तिरछा करके

घटाया जाता है। यहां मैट्रिक्स A का आयाम 2x2 होने से यह द्वितीय क्रम का सारणिक कहा जावेगा।

इसी प्रकार 3x3 क्रम के मैट्रिक्स

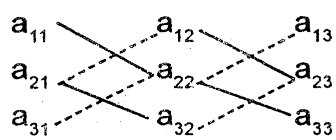
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

का सारणिक होगा

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{32}\, a_{21}$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

|A| के उपरोक्त पद चित्र-1 में दर्शाये गये नियम के अनुसार प्राप्त किये जा सकते हैं -



यहां —— लाल रेखाओं द्वारा जोडें गये अवयवों का गुणन धनात्मक पदों को और हरी -------- रेखाओं द्वारा जोड़े गये अवयवों का गुणान ऋणात्मक पदों को दर्शाता है। यहां यह ध्यान रखें कि उच्च क्रम के मैट्रिक्सों के लिए यह नियम लागू नहीं होता है।

अब हम सारणिक को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं:-

nxn राशियों ($a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$) को दो समानान्तर ऊर्ध्वाधार (Vertical) का लम्बवत रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत (Square array) में लिखे गये क्रम विन्यास को n कोटि का सारणिक कहते हैं प्रतीक रूप में

$$|a_{ij}| = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ जहां } i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n \text{ है}$$

यहां a_{ij}'s सारणिक A के अवयव हैं; पादांक i, पंक्ति का और द्वितीय पादांक j स्तम्भ का अभिसूचक है।

n क्रम के एक सारणिक $|A| = |a_{ij}|$ जहां $i, j = 1, 2, \ldots, n$ है, का मूल्य n! पदों का बीजगणितीय योग होता है। n! पदों में सभी संभव एवं भिन्न संयोग (all possible and distinct combination) आ जाते हैं जो इस प्रकार से चयनित किये जाते हैं कि प्रत्येक पद में एक अवयव प्रत्येक पंक्ति से और एक अवयव प्रत्येक स्तम्भ से हो। i को बढ़ते हुए क्रम में रखने पर जहां j के क्रम में उलटाव की संख्या सम होती है पद का चिह्न धनात्मक और असम होने पर ऋणात्मक

होता है। इस नियम का उपयोग करके 3x3 से बड़े क्रम के मैट्रिक्स का सारणिक ज्ञात करना कठिन है। जैसे 4x4 क्रम के मैट्रिक्स का सारणिक 4! = 24 पदों का बीजगणित योग होगा और प्रत्येक पद 4 अवयवों का गुणन फल होगा।

3x3 क्रम से बड़े मैट्रिक्स का सारणिक सामान्यतया एक दूसरी पद्धति जिसे सहखण्डों से विस्तार (expansion by factors) कहा जाता है, द्वारा ज्ञात किया जाता है।

जैसे 3x3 क्रम के मैट्रिक्स के सारणिक को सह खण्डों से विस्तार करके निम्न प्रकार से लिखा जा सकता हैं :-

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

यहां आप यह ध्यान दें कि योग में प्रत्येक सारणिक A मैट्रिक्स के सब्मैट्रिक्स का सारणिक है जो उस अवयव वाली पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ने पर प्राप्त होती है।

उदाहरणार्थ

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ में a_{11} की लघु सारणिक M_{11} इस सारणिक

की प्रथम पंक्ति तथा स्तम्भ को छोड़ने पर

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ या $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ होती है।

व्यापक रूप से कहें तो अवयव a_{ij} की उप-सारणिक (Minor) दी हुई सारणिक की i^{th} पंक्ति j^{th} स्तम्भ छोड़ने पर प्राप्त होती है।

इसी प्रकार a_{12} अवयव का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं द्वितीय स्तम्भ को निरस्त करके प्राप्त किया जाता है अर्थात

a_{12} का उपसारणिक = $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

अवयव a_{13} का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं तृतीय स्तम्भ को निरस्त करके प्राप्त किया जाता है। अर्थात

a_{13} का उपसारणिक = $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

उपसारणिक को संगत शीर्ष अक्षरों से प्रदर्शित करने पर

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

(प्रथम पंक्ति लेने पर)

प्रथम स्तम्भ से विस्तार करने पर

$$|A| = a_{11} A_{11} - a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$$

उपसारणिक से निकट संबंध रखने वाली अवधारणा सहखण्ड **(Cofactor)** है। यदि उपसारणिकों को उनके चिह्नों के साथ लिखा जावे तब वे उस अवयव के सहखण्ड कहलाते हैं। उदाहरणार्थ, a_{11} का सहखण्ड $(+A_{11})$, a_{12} का सहखण्ड $(-A_{12})$ तथा a_{13} का सहखण्ड $(+A_{13})$ है। सहखण्ड के निशान लगाने का नियम यह है कि उपसारणिक में i और j का जोड़ सम (even) हो तो उपसारणिक व सहखण्ड का निशान एक-सा होगा। यदि विषम हो जैसे 3, 5, 7 आदि तो सहखण्ड का निशान उपसारणिक के निशान से उलटा होगा।

यदि हम उपसारणिक को $|M_{ij}|$ से और सहखण्ड को $|C_{ij}|$ से सूचित करें तो

i+j सम होने पर $|C_{ij}| = |M_{ij}|$

i+j विषम होने पर $|C_{ij}| = |M_{ij}|$

अथवा स्कैलर

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \; |M_{ij}|$$

सहखण्ड को Signed minor भी कहा जाता है।

nxn मैट्रिक्स $(C_{ij})^{1}$ (सहखण्ड मैट्रिक्स का ट्रांसपोज) को मैट्रिक्स A का सहखण्डज **(Adjoint)** कहा जाता है और **adj A** द्वारा बताया जाता है।

सहखण्डों से विस्तार की इस पद्धति को लाप्लेस विस्तार **(Laplace expansion)** कहा जाता है। यह विधि **4x4** क्रम के सारणिक में भी प्रयुक्त की जा सकती है।

गणितीय सूत्र के रूप में इस विधि को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :-

पंक्ति i से विस्तार करने पर

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ किसी भी पंक्ति के लिये i = 1, 2, ... n

स्तम्भ j से विस्तार करने पर

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ किसी भी स्तम्भ के लिए $j = 1, 2, \ldots, n$

लाप्लेस विस्तार किसी पंक्ति या स्तम्भ से किया जा सकता है। सबसे समान परिणाम प्राप्त होते हैं।

सारणिक प्रसार में निम्नलिखित लक्षण पाये जाते हैं :-

(1) सारणिक प्रसार के दाये पक्ष में प्रत्येक पद उतने ही अवयवों का गुणन फल है जितना कि उस सारणिक का क्रम है।

जैसे

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$$

यहां प्रत्येक पद में दो-दो अवयव हैं।

इसी प्रकार तृतीय क्रम का सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31} - a_{23}\ a_{32}\ a_{11} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$$

यहां प्रत्येक पद में तीन-तीन अवयव हैं।

(2) सारणिक-प्रसार के दायें पक्ष के प्रत्येक पद में सारणिक A की प्रत्येक पंक्ति से एक ओर केवल एक अवयव है तथा प्रत्येक स्तम्भ से भी एक ओर केवल एक अवयव है। अर्थात, एक अवयव एक ही पद में पुनः नहीं आता।

(3) 2x2 सारणिक प्रसार में पदों की संख्या 2! = 2 तथा 3x3 सारणिक प्रसार में पदों की संख्या 3! = b है तथा सभी पद भिन्न हैं। इस प्रकार nxn सारणिक प्रसार में n! पद होंगे।

(4) आधे पदों का चिन्ह धनात्मक तथा आधे पदों का चिन्ह ऋणात्मक हैं।

(5) सामान्यतः n^2 अवयव nवीं क्रम के सारणिक में व्यवस्थित होंगे।

सारणिक व मैट्रिक्स में अंतर

आप इकाई 11 में जान चुके हैं कि मैट्रिक्स में राशियां आयताकार क्रम विन्यास के रूप में होती हैं अर्थात मैट्रिक्स संख्याओं का निकाय होता है जबकि सारणिक एक संख्या है। मैट्रिक्स का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता जबकि सारणिक का मान ज्ञात किया जा सकता है। मैट्रिक्स के लिये सदैव वर्ग होना आवश्यक नहीं है जबकि सारणिक केवल वर्ग-मैट्रिक्स में ही परिभाषित माना जाता है। मैट्रिक्स को [ ] या ( ) कोष्ठकों अथवा दोहरी समांतर उर्ध्वाधर रेखाओं || || में रखा जाता है जबकि एक सारणिक को दो उर्ध्वाधर रेखाओं के बीच रखा जाता है।

इकाई 11 में आप जान चुके हैं कि मैट्रिक्स को किसी भी संख्या से गुणा करना या भाग देना हो तो इसके समस्त अवयव प्रभावित होंगे, लेकिन सारणिक में केवल एक पंक्ति अथवा स्तम्भ के अंक ही प्रभावित होते हैं जैसे :-

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{होगा जबकि}$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{अथवा} \quad \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} \text{ ही होगा।}$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad \text{होगा जबकि}$$

$$\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/5 & 2 \\ 3/5 & 4 \end{vmatrix} \text{ अथवा } \begin{vmatrix} 1 & 2/5 \\ 3 & 4/5 \end{vmatrix} \text{ अथवा } \begin{vmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ होगा}$$

12.3 सारणिक का मूल्यांकन

सारणिक की संकल्पना में आप जान चुके हैं कि प्रत्येक सारणिक का एक संख्यात्मक मूल्य होता है। किसी भी सारणिक को लाप्लेस विस्तार पद्धति से द्वितीय क्रम के सारणिकों में विस्तार कर इसका मूल्य ज्ञात किया जा सकता है।

द्वितीय क्रम के सारणिक का मान

यदि मैट्रिकस $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ है

तो $\text{Det } A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ होता है

अर्थात द्वितीय क्रम के सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के गुणन (Product) तथा इसके विपरीत विकर्ण के अवयवों के गुणन का अन्तर होता है।

उदाहरण 1

1.1 यदि $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ है तो $|A| - |B|$

तथा $|A|\ |B|$ ज्ञात करो।

हल :

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (7 \times 4) - (9 \times -3)$$

$= 28 + 27$

$= 55$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1x1) - (0x0) = 1-0$$

$$= 1$$

अतः $|A| - |B| = 55-1 = 54$

तथा $|A|\ |B| = 55x1 = 55$

1.2 यदि $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ है तो $|A^2|$ ज्ञात करो।

हल:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3x3) + (4x\ -2) & (3x4) + (4x\ -3) \\ (-2x3) + (-3x-2) & (-2x4) + (-3x-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1x1) - (0x0) = 1-0=1$$

1.3 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ तो $|AB|$ ज्ञात करो।

हल:

$$AB = \begin{bmatrix} (1x7) + (0+9) & (1x\ -3) + (0x4) \\ (0x7) + (1x9) & (0x\ -3) + (1x4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (7x4) - (-3x9)$$

$$= 28+27$$

$$= 55$$

तृतीय क्रम के सारणिक का मान

माना कि

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

यह तृतीय क्रम का सारणिक है। इसके प्रथम पंक्ति के अवयवों a_{11}, a_{12} तथा a_{13} के द्वारा सारणिक का प्रसार करने पर हमको निम्नांकित मान प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

इस प्रकार

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

$|A| = 4 (4-0) - 2 (12-0) + 1 (6-5)$

$|A| = 16-24+1$

$|A| = -7$

उदाहरण 2

2.1 मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सारणिक ज्ञात कीजिये।

हल:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ से विस्तार करने पर

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} -6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3 (-32-3) - 6 (0+6) + 0 (0-16)$

$= -105-36+0$

$|A| = -141$

2.2 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ तो $|BA|$ ज्ञात करो।

हम जानते हैं कि $|BA| = |B| . |A|$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से विसतार करने पर)

$= 1 (0-6) -1 (-2+3) + 0 (4-0)$
$= -6-1+0$
$= -7$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2 (2-0) - 3 (-1-6) + 1 (0-4)$
$= 4+21-4$
$= 21$

$|BA| = |B| . |A| = -7x21 = -147$

2.3 यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

तो $|AB|$ का मान ज्ञात कीजिये।

हलः

हम जानते हैं कि $|AB| = |A| . |B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(द्वितीय स्तम्भ से विस्तार करने पर)

$= -3 (1-8) + 0-3 (8-4)$
$= 21-12$
$|A| = +9$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(द्वितीय पंक्ति से विस्तार करने पर)

$= -1\ (-9+2) + 3\ (12-4) - 0$

$= 7 + 24$

$|B| = 31$

$|AB| = |A| . |B| = 9 \times 31 = 279$

नोट : जिस पंक्ति या स्तम्भ में सबसे अधिक शून्य हों उस पंक्ति या स्तम्भ से विस्तार करना सुविधाजनक होता है।

अभ्यास

E-1 यदि $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ है तो $|A|$ का मान ज्ञात कीजिये।

E-2 यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ है तो Adj. A ज्ञात कीजिये

E-3 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, -2 तथा 4 के लघु सारणिक ज्ञात करो।

(ii) अवयव 2, -2 तथा -3 के सहखण्ड ज्ञात करो।

E-4 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ का प्रसार कर मान ज्ञात कीजिये।

E-5 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & d \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

E-6 $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

अवयव a, b और f के लघुसारणिक एवं सहखण्ड ज्ञात करो।

12.4 सारणिक के गुणधर्म (Properties of Determinants)

प्रमेय 1 : यदि सारणिक में पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित किया जावे तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरणार्थ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

प्रमेय 2 : यदि किसी सारणिक में दो पंक्तियों या स्तम्भों को परस्पर अर्न्तपरिवर्तित कर दिया जाय तब सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, परन्तु चिन्ह में परिवर्तन हो जाता है।

उदाहरणार्थ -

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

संख्यात्मक रूप में $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\ (0-4)\ -2\ (0-1) + 6\ (12-5)$$

$= -4+2+42 = 40$

प्रथम एवं तृतीय पंक्ति को परस्पर बदलने पर

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\ (30-2)\ -4\ (18-1) + 0\ (6-5)$$

$= 28-68 = -40$

प्रमेय 3 : यदि किसी स्तम्भ (या पंक्ति) को निकट के स्तम्भ (या पंक्ति) के आगे खिसकाया जाता है तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है परन्तु छलांगे गये स्तम्भों (या पंक्तियों) की संख्या विषम होने पर चिन्ह बदल जाता है।

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40$ है जबकि $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -40$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 40 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

प्रमेय 4 : यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अदिश (scalar) से गुणा किया जाय तो सारणिक के मान में उस राशि का गुणा हो जाता है।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40$$

प्रथम स्तम्भ को 5 से गुणा करने पर

$$\begin{vmatrix} 1x5 & 2 & 6 \\ 3x5 & 5 & 1 \\ 1x5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 15 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40x5=200$$

उपप्रमेय —

इसी विशेषता के आधार पर हम सारणिक की किसी भी पंक्ति या स्तम्भ से किसी संख्या को उभयनिष्ठ (Common factor) ले सकते हैं जैसे

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से 5 उभयनिष्ठ लेने पर)

$$\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5x2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से 5 एवं द्वितीय पंक्ति से 2 उभयनिष्ठ लेने पर)

नोट : मैट्रिक्स एवं सारणिक से उभयनिष्ठ लेने में मूलभूत अन्तर है जिसे सदैव ध्यान में रखा जाना चाहिये। मैट्रिक्स में उभयनिष्ठ सारे अवयवों में से लिया जावेगा जबकि सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ से। इसी प्रकार किसी मैट्रिक्स को किसी अदिश से गुणा करने पर उस मैट्रिक्स के सभी अवयव अदिश से गुणा हो जावेंगे जबकि एक सारणिक को अदिश से गुणा करने पर केवल किसी एक पंक्ति या स्तम्भ के अवयव अदिश से गुणा होंगे।

(अदिश एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसका अवयव केवल एक वास्तविक संख्या है)

प्रमेय 5 : यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियां अथवा स्तम्भ सर्वसम हो तो उस सारणिक का मान शून्य होता है। जैसे

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

प्रथम पंक्ति तथा तृतीय पंक्ति सर्वसम हैं। इन दोनों को अर्न्तपरिवर्तित करने पर (प्रमेय 2 से)

$A = -A$

अथवा $2A = 0$

अथवा $A = 0$

प्रमेय 6 : यदि एक सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के सभी अवयव शून्य हों तो उस सारणिक का मान शून्य होगा

$$\text{यदि } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} 0\text{-}0\text{-}0 = 0$$

प्रमेय 7 : यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (या स्तम्भ) दूसरी किसी पंक्ति (या स्तम्भ) का कोई गुणा हो तो सारणिक का मान शून्य होगा।

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(तृतीय पंक्ति के सभी अवयव प्रथम पंक्ति के संगत अवयवों से दुगने हैं)

प्रमेय 8 : यदि सारणिक का किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में अन्य किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत अवयवों को किसी भी अचर राशि से गुणा करके जोड़ या घटा दिया जाय तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। अर्थात्

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 1\ (48-0) -2\ (24-0) + 3\ (4-24)$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

$= 48-48-60 = -60$

स्तम्भ 1 को 2 से गुणा कर स्तम्भ 2 से घटाने पर $(C_2\text{-}2C_1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-(1x2) & 3 \\ 2 & 4-(2x2) & 0 \\ 6 & 2-(6x2) & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -10 & 12 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$= 1\ (0-0)\ -\ 0\ (24-0)\ +\ 3\ (-20-0)$

$= 0\ -\ 0\ -\ 60$

$= -60$

प्रमेय 9 : यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो राशियों के योग (अथवा अंतर) के रूप में हो तो सारणिक को उसी क्रम के दो सारणिकों के योग (अथवा अंतर) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैसे

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$\begin{vmatrix} 4-2 & 2 & 1 \\ 3-1 & 4 & 2 \\ 5-3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} (-) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

प्रमेय 10 : दो आव्यूहों (मैट्रिक्सों) के गुणनफल का सारणिक उन आव्यूहों के सारणिक के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात $|AB| = |A|\ |B|$

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ तब

$AB = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 11 & -8 & -8 \end{bmatrix}$ अतः $|AB| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 11 & -8 & -8 \end{vmatrix}$

$= 5\ (0+24)\ +\ 6\ (8-33)\ -\ 1\ (8-0)$

$= 120-150-8$

$= -38$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\ (0-4)\ -\ 3\ (-4+1)\ -3\ (8-0)$

$= -4+9-24 = -19$

$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\ (2-0)\ -0\ (-3+2)\ -2\ (0+2)$

$= -2-0+4$

$= 2$

अतः $|AB| = |A|\ |B| = (-19)\ (2) = -38$

प्रमेय 11 : एक विकर्ण मैट्रिक्स (Diagonal Matrix) का सारणिक इसके विकर्ण के अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है।

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ है तब } |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$|A| = -2\ (15-0) - 0 + 0 = -30$

अथवा $-2 \times 3 \times 5 = -30$

सारणिकों के उपरोक्त गुणधर्मों (Properties) का उपयोग करके सारणिक का मान लाप्लेस विस्तार किये बिना भी ज्ञात किया जा सकता है। ऐसी समस्याओं के कुछ उदाहरणों द्वारा हम सारणिक का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

उदाहरण 3

3.1 निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिये :-

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

हल :

(a) उपरोक्त सारणिक के प्रथम तथा द्वितीय, द्वितीय तथा तृतीय स्तम्भों के अवयवों का अंतर 3 है अतः तृतीय स्तम्भ में से द्वितीय स्तम्भ के संगत अवयवों को घटाने पर (C_3-C_2 से)

$$\begin{vmatrix} 9 & 12 & 15-12 \\ 10 & 13 & 16-13 \\ 11 & 14 & 17-14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 10 & 13 & 3 \\ 11 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

पुनः द्वितीय स्तम्भ में से प्रथम स्तम्भ के संगत अवयवों को घटाने पर (C_2-C_1 से)

$$\begin{vmatrix} 9 & 12-9 & 3 \\ 10 & 13-10 & 3 \\ 11 & 14-11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 10 & 3 & 3 \\ 11 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

प्रमेय 5 के अनुसार यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियां या स्तम्भ सर्वसम हो तो उस सारणिक का मान शून्य होता है। उपरोक्त सारणिक के स्तम्भ द्वितीय एवं तृतीय सर्वसम हैं; अतः सारणिक मान शून्य है। विस्तार करके हल करने पर भी यह ही परिणाम प्राप्त होगा।

$$\text{(b) माना } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

स्तम्भ 3 में से स्तम्भ 2 के संगत अवयवों को घटाने पर (C_3-C_2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-1 \\ 1 & 2 & 3-2 \\ 1 & 3 & 6-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

स्तम्भ 2 में से स्तम्भ 1 के संगत अवयवों को घटाने पर (C_2-C_1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 3-1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$|A|$ = 1 (1x3 - 2x1) -0+0 = 1 (3-2)

$|A|$ = 1

(c) माना $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

C_3-C_2

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8-5 \\ 3 & 6 & 9-6 \\ 4 & 7 & 10-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

C_2-C_1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5-2 & 3 \\ 3 & 6-3 & 3 \\ 4 & 7-4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

प्रमेय 5 के अनुसार कोई भी दो स्तम्भ सर्वसम हों तो सारणिक का मान शून्य होगा।

3.2 **सिद्ध कीजिये कि :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$$

हल : दी हुई सारणिक को Δ से व्यक्त करने तथा स्तम्भ 1 में से स्तम्भ 2 के संगत अवयव घटाने पर (C_1-C_2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ a-b & b & b \\ a_2-b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

स्तम्भ 2 में से स्तम्भ 3 के संगत अवयव घटाने पर (C_2-C_3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1-1 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ से (a-b) और द्वितीय स्तम्भ से (b-c) को उभयनिष्ठ (Common) लेने पर

$$\Delta = (a-b)\ (b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

पंक्ति 1 के अनुसार विस्तार करने पर

$$\Delta = (a-b)\ (b-c)\ [(b+c) - (a+b)]$$
$$= (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$$

इस प्रकार सिद्ध होता है कि $\Delta = (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$

3.3 **सिद्ध कीजिये कि**

$$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$$

हल :

दी हुई सारणिक को Δ =

$$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$$

से व्यक्त करें तथा प्रथम स्तम्भ से a^2, द्वितीय स्तम्भ से b^2 एवं तृतीय स्तम्भ से c^2 उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ c & c & 0 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से a, द्वितीय पंक्ति से b एवं तृतीय पंक्ति से c उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = a^3b^3c^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

द्वितीय स्तम्भ से तृतीय स्तम्भ के संगत अवयव घटाने पर (C_2-C_3)

$$\Delta = a^3b^3c^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$$\Delta = a^3b^3c^3\ [0-0+1\ \ (1+1)]$$

$$\Delta = 2a^3b^3c^3$$

3.4 सिद्ध कीजिये –

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\ (a+b+c)^3$$

दी हुई सारणिक को Δ से व्यक्त करने और C_1-C_3 तथा C_2-C_3 का प्रयोग करने पर

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b+c+a)\ (b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a+b)\ (c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b)\ (c-a-b) & (c+a+b)\ (c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$[(a+b)\ (a-b) = a^2-b^2]$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

तृतीय पंक्ति में से प्रथम व द्वितीय पंक्ति के योग को घटाने पर $[R_3 - (R_1+R_2)]$

$$|\Delta| = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भ का क्रमश a व b से गुणा करके दोनों स्तम्भों से तृतीय स्तम्भ के संगत अवयव जोड़ने पर

$$|\Delta| = (a+b+c)^2/ab \begin{vmatrix} ab+ac-a^2+a^2 & a^2 & a^2 \\ 0+b^2 & bc+ab-b^2+b^2 & b^2 \\ -2ab+2ab & -2ab+2ab & 2ab \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2/ab \begin{vmatrix} ab+ac & a^2 & a^2 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$

$= 2abc\ (a+b+c)^3$ (तृतीय पंक्ति से विस्तार करने पर)

अभ्यास :

E-7 बिना विस्तार किये सिद्ध करों कि $\begin{vmatrix} 19 & 17 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

E-8 प्रदर्शित कीजिये कि $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)\ (c-a)\ (a+b)\ (a+b+c)$

E-9 सारणिक के किन गुणधर्मों के आधार पर निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

E-10 सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2\ (a+b+c)^3$$

E-11 सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

E-12 सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

12.5 क्रैमर के नियम द्वारा युगपत समीकरणों का हल

अर्थशास्त्र के कई मॉडलों के विश्लेषण में युगपत एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय को हल करना होता है। जैसे जैसे चरों की संख्या तथा तदनुसार समीकरणों की संख्या में वृद्धि होती है, समस्या जटिल होती जाती है। सारणिकों के उपयोग से एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय

को हल करना बहुत सरल हो जाता है। सारणिक उन समीकरणों के समुच्चय द्वारा ही बन सकता है जहां चरों की संख्या समीकरणों की संख्या के बराबर हो। मैट्रिक्स बीजगणित की पद्धति से युगपत समीकरणों के हल की एक विधि आप इकाई-11 में जान चुके हैं, जिसके अनुसार

$$X_{nx1} = A^{-1}_{nxn}\ K_{nx1}$$

जहां A = गुणांक a_{ij} का आव्यूह

B = चरों का स्तम्भ सदिश

C = अचरों का स्तम्भ सदिश

इस इकाई में हम युगपत समीकरणों के समुच्चय का हल दूसरी पद्धति, जिसे क्रैमर का नियम (Cramer's Rule) कहते हैं, द्वारा प्राप्त करेंगे।

माना कि युगपत समीकरणों का समुच्चय निम्न है -

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = K_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = K_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = K_3$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} K_1 & a_{12} & a_{13} \\ K_2 & a_{22} & a_{23} \\ K_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & K_1 & a_{13} \\ a_{21} & K_2 & a_{23} \\ a_{31} & K_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & K_1 \\ a_{21} & a_{22} & K_2 \\ a_{31} & a_{32} & K_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

उपरोक्त अनुपातों में हर (denominator) चरों के गुणांक मैट्रिक्स का सारणिक हैं। अंश (numerator) गुणांक मैट्रिक्स का ऐसा सारणिक है जिसमें i वां स्तम्भ (i = 1, 2, 3) दायीं ओर के अचर मूल्यों के स्तम्भ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है।

यदि $|A| = 0$ हैं तो एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय का कोई अनन्य हल नहीं है।

ऊपर 3 युगपत समीकरणों की स्थिति में अनन्य हल ढूंढने की प्रक्रिया बताई गई है। n समीकरणों की स्थिति में भी इसी प्रकार की प्रक्रिया अपनाई जावेगी।

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, अर्थात n अज्ञात मूल्य और n समीकरण दिये हुये हैं।

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = k_2$$
$$: : : : : :$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = k_n$$

माना कि अज्ञात मूल्य $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ के गुणांकों का सारणिक $|\Delta|$ है, जैसे

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

यदि हम i वें स्तम्भ के स्थान पर समीकरणों के दायीं ओर के गुणांकों के स्तम्भ को प्रतिस्थापित करके बने सारणिक को $|D_i|$ द्वारा बतावें, तब

$$x_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|},\ x_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}\ \ x_3 = \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|}\ \ldots x_i\ \frac{|\Delta_i|,}{|\Delta|,},\ \ldots x_n = \frac{|\Delta_n|}{|\Delta|}$$

जहां $(|\Delta| \neq 0)$

जैसे युगपत समीकरणों का समुच्चय है -

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

तब

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\ (-1+4)\ -\ 1\ (2+3)\ +\ 1\ (8+3)$$

$$= +3-5+11$$
$$= 9$$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\ (1-4)\ -1\ (0+8)\ +\ 1\ (0+8)$$

$$= 9-8+8$$
$$= 9$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1\ (0+8)\ -\ 3\ (2+3)\ +\ 1\ (16-0)$$

$$= 8-15+16$$
$$= 9$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\ (-8+0)\ -1\ (16-0)\ +\ 3\ (8+3)$$

$$= -8-16+33$$

$$= 9$$

तब $x_1 = \dfrac{|\Delta_1|}{|\Delta|}$, $x_2 = \dfrac{|\Delta_2|}{|\Delta|}$, $x_3 \quad \dfrac{|\Delta_3|}{|\Delta|}$

अथवा $x_1 = \dfrac{9}{9} = 1$, $x_2 = \dfrac{9}{9} = 1$, $x_3 = \dfrac{9}{9} = 1$

उदाहरण - 4 सारणिकों का उपयोग करके निम्न समीकरणों को हल कीजिये :-

(i) $x + y + 2z = 9$
$x + 2y + 3z = 14$
$2x + 3y + z = 11$

(ii) $x + y + 3z = 0$
$x + 2y = 6$
$x + 3y + z = 8$

(iii) $3x + 5y - 7z = 13$
$4x + y - 12z = 6$
$2x + 9y - 3z = 20$

(i) माना कि अज्ञात राशियों के गुणाकों का सारणिक $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -7+5-2 = -4$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 14 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -63+19+40$$

$$= -4$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} -9 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -19+45-34$$

$$= -8$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} +9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -20+17-9$$

$$= -12$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{-12}{-4} = 3$$

नोट : हल की जांच x, y और z का मूल्य सभी समीकरणों में प्रतिस्थापित करके कीजिये, जैसे

$$x + y + 2z = 1 + 2 + 2\,(3) = 9$$

(ii) माना कि अज्ञात राशियों के गुणाकों का सारणिक $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2-1+3 = 4$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 6 = 0$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 0 + 6 = 12$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} +0$$

$$= -2 -2 = -4$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{12}{4} = 3$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{-4}{4} = -1$$

(iii) माना कि अज्ञात राशियों के गुणाकों का सारणिक $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 4 & 1 & -12 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -12 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} -7 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (-3+108)\ -5\ (-12+24)\ -7\ (36-2)$$

$$= 315-60-238$$

$$= 17$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 13 & 5 & -7 \\ 6 & 1 & -12 \\ 20 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 13\ (-3+108)\ -5\ (-18+240)\ -7\ (54-20)$$

$$= 1365-1110-238$$

$$= 17$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 13 & -7 \\ 4 & 6 & -12 \\ 2 & 20 & -3 \end{vmatrix} = 3\ (-18+240)\ -13\ (-12+24)\ -7\ (80-12)$$

$$= 34$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & 20 \end{vmatrix} = 3\ (20-54)\ -\ 5\ (80-12)\ +\ 13\ (36-2)$$

$$= 0$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{17}{17} = 1$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{34}{17} = 2$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{0}{17} = 0$$

अभ्यास :

E-13 युगपत समीकरणों के निम्न समुच्चयों को सारणिक विधि (क्रैमर का नियम) लागू करके हल कीजिये :-

(i) $7x - y - z = 0$
$10x - 2y + z = 8$
$6x + 3y - 2z = 7$

(ii) $x - 2y + 3z = 1$
$2x + y - 4z = 3$
$2x + y - 2z = -1$

(iii) $2x - y + 3z = 9$
$x + 3y - z = 4$
$3x + 2y + z = 10$

(iv) $4x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 15$
$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8$
$x_1 - 7x_2 - x_3 = 6$

12.6 सारांश

1. दो समानान्तर लम्बवत रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत में लिखे गये क्रम-विन्यास को सारणिक कहते हैं।
2. सारणिक केवल वर्ग-आव्यूहों के लिये ही परिभाषित होते हैं।
3. सारणिक का मान ज्ञात किया जा सकता है। मान ज्ञात करने के लिये सहखण्डों से विस्तार की पद्धति अपनाई जाती है।
4. सारणिक के गुणधर्मों के आधार पर, जहां संभव हो, बिना विस्तार किये भी सारणिक का मान ज्ञात किया जा सकता है।
5. एक रेखीय युगपत समीकरणों के समुच्चय का अनन्य हल सारणिक विधि से ज्ञात किया जा सकता है। इस विधि को क्रैमर का नियम कहते हैं।

12.7 हल और उत्तर

E-1 $|A| = 0$

E-2 adj. A = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

E-3 (i) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$

(ii) $(+)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$, $(+)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$, $(+)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

E-4 $|A| = -26$

E-5 $3abc-a^3-b^3-c^3$

E-6 $|Ma| = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ $|Mb| = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ $|Mf| = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$|Ca| = +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ $|Cb| = (-)\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ $|Cf| = (-)\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

E-7 $R_1 - 2R_2$ करने पर प्रथम व तृतीय पंक्ति समान है अतः मान शून्य है।

E-8 $a^3-b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$
C_1-C_2 एवं C_2-C_3 लेकर (a-b) व (b-c) उभयनिष्ठ लीजिये।

E-9 (a) सारणिक की किसी पंक्ति के प्रत्येक अवयव को किसी अचर राशि से गुणा कर किसी अन्य पंक्ति के संगत अवयवों में से घटाने पर सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है। (R_2-$3R_1$)

(b) प्रथम पंक्ति से 9 एवं द्वितीय पंक्ति से 2 उभयनिष्ठ लेने पर, क्योंकि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ से कोई भी अचर राशि उभयनिष्ठ के रूप में बाहर ली जा सकती है।

(c) एक पंक्ति दूसरी पंक्ति का कोई गुणा होने पर सारणिक का मान शून्य होता है। (R_1=$2R_2$)

(d) सारणिक के किसी स्तम्भ को निकट के स्तम्भ के आगे खिसकाया जाय तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है परन्तु छलांगें गये स्तम्भों की संख्या विषम होने पर चिन्ह बदल जाता है।

E-10 (i) $C_1 + C_2 + C_3$ (ii) प्रथम स्तम्भ से 2 (a+b+c) कॉमन लें (iii) R_2-R_1 एवं R_3-R_1 करें (iv) प्रथम पंक्ति से प्रसार करें।

E-11 (i) C_3+C_2 करें (ii) C_3 में -1 का भाग देकर -1 उभयनिष्ठ लें (iii) प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ सर्वसम होने से मान शून्य होगा।

E-12 (i) द्वितीय पंक्ति से प्रथम पंक्ति के संगत अवयव घटावें (ii) तृतीय पंक्ति में द्वितीय पंक्ति के संगत अवयव जोड़े (iii) प्रथम पंक्ति से विस्तार करें।

E-13 (i) x=1, y=3, z=4 (ii) x=0, y=1, z=1 (iii) x=1, y=2, z=3 (iv) $|\Delta| = 0$ असंगत, हल नहीं।

12.8 शब्दावली

सारणिक	Determinant
रेखिक समीकरण	Linear equation
निकाय/समुच्चय	Set
लघुसारणिक/उपसारणिक	Minor
सहखण्ड	Cofactor
सहखण्डज	Adjoint
गुणधर्म	Properties
अचर	Constant
उभयनिष्ठ	Common factor
हर	Denominator
अंश	Numerator
गुणांक	Coefficient

12.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Chiaing, Alpha C., Fundamental Methods of Mathematical Economics, Mcgraw Hill, 1984, Chapter-5

Weber, Jean E., Mathematical Analysis, Business and Economics Applications, Harper, 1982, Chapter-7

Mehta and Madnani, Mathematics for Economics, Sultan Chand, 1988, Chapter-3

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका, अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग, कॉलेज बुक हाउस, 1989 अध्याय-11

295

इकाई — 13

आगत निर्गत सारणी विश्लेषण का परिचय

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

13.1 प्रस्तावना

13.2 आगत-निर्गत विश्लेषण

13.3 आगत-निर्गत प्रतिरूप (मॉडल) की संरचना

13.4 खुला प्रतिरूप

13.5 सारांश

13.6 हल और उत्तर

13.7 शब्दावली

13.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

13.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रकृति को समझ जायेंगे।
- तकनीकी गुणांकों का परिकलन कर सकेंगे और उन्हें आव्यूह के रूप में प्रस्तुत कर सकेंगे।
- आव्यूह बीजगणित की सहायता से आगत-निर्गत प्रणाली का हल ज्ञात करने की विधि जान जायेंगे।
- अर्थप्रणाली के खुले प्रतिरूप (Open-Model) की धारणा को समझ जायेंगे और प्रतिरूप को युगपत समीकरणों के समुच्चय के रूप में प्रस्तुत कर आव्युह बीजगणित की सहायता से वांछित उत्पादन स्तर एवं आगत मात्रा निर्धारित कर सकेंगे।

13.1 प्रस्तावना

आपने इकाई 11 एवं 12 में आव्यूह बीजगणित का ज्ञान प्राप्त किया है। आव्यूहों पर आधारभूत संक्रियाओं की विधियाँ, पक्षान्तरण एवं प्रतिलोम ज्ञात करना आप सीख चुके हैं। आपने इकाई 11 में आव्यूह बीजगणित की सहायता से एक रैखीक युगपत समीकरणों के समुच्चय का अनन्य हल ज्ञात करना भी सीख लिया है। इस इकाई में हम आव्यूह बीजगणित का प्रयोग आगत-निर्गत विश्लेषण में करेंगे।

13.2 आगत-निर्गत विश्लेषण

आगत-निर्गत विश्लेषण उत्पादन एवं लागत की समस्याओं के विश्लेषण की एक नई अर्थमिति तकनीक है। इसे सर्वप्रथम फ्रांसीसी अर्थशास्त्री क्वैस्ने ने अपने सिद्धान्त Tableau Economique के अन्तर्गत प्रस्तुत किया था। हारवर्ड विश्वविद्यालय के प्रो. वैसली लियोन्तीफ (Wassily Leontief) ने 'आगत-निर्गत पूँजी प्रवाह पद्धति' के रूप में इसे विकसित किया। प्रो. लियोन्तीफ को अर्थशास्त्र के क्षेत्र में इस महान उपलब्धि के लिये 1973 का नोबिल पुरस्कार प्रदान किया गया था।

एक अर्थव्यवस्था अनेक क्षेत्रों का एक समुच्चय है। राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था में संतुलन के लिये विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों में आन्तरिक सामंजस्य आवश्यक है। प्रक्रमन (programming) द्वारा आन्तरिक सामंजस्य का संस्थापन समाजवादी नियोजन का आधार है। आगत-निर्गत विश्लेषण राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था को संतुलित करने हेतु एक व्यवस्था है, जिसके अन्तर्गत उत्पादन की मात्रा तथा अर्थव्यवस्था के विविध क्षेत्रों में इसके आबंटन का अध्ययन किया जाता है।

इस विश्लेषण तकनीक में हम अर्थव्यवस्था का एक प्रतिरूप (Model) लेते हैं जो कई क्षेत्रों अथवा उद्योगों में बंटा होता है। सारे क्षेत्र या उद्योग परस्पर अन्तर-निर्भर होते हैं अर्थात् प्रत्येक क्षेत्र में आगत किसी अन्य क्षेत्र का निर्गत होता है। प्रत्येक क्षेत्र या उद्योग अन्य क्षेत्रों या उद्योगों द्वारा उत्पादित माल को आगत (input) के रूप में प्रयुक्त करता

है। अपनी उत्पत्ति का कुछ भाग वह क्षेत्र अपने स्वयं के उपयोग में ले सकता है। प्रत्येक उद्योग (क्षेत्र) के द्वारा उत्पादित माल को दो भागों में बाँटा जाता हैं :

(i) अन्तर-उद्योग मांग (ii) उपभोक्ता की मांग या अन्तिम मांग। इसी प्रकार एक उद्योग के लिये आगत भी दो प्रकार के होते हैं : (i) उत्पादित आगत जो अन्य उद्योगों में उत्पादित किये जाते है। (ii) प्राथमिक आगत अर्थात वे आगत जिनका उत्पादन उस प्रणाली के अन्दर से नहीं होता जैसे श्रम एवं भूमि।

प्रत्येक आर्थिक क्षेत्र (या उद्योग) के लिये आगत व निर्गत सम्बन्धी समंकों के आधार पर तकनीकी गुणांक ज्ञात किये जाते हैं। तकनीकी गुणांकों का निर्धारण हो जाने पर अन्तिम वस्तुओं की मांग के किसी भी स्तर के लिये विभिन्न उद्योगों में वांछनीय उत्पादन स्तर का परिकलन किया जाता है। इस परिकलन में आव्यूह बीजगणित (Matrix Algebra) का उपयोग होता है। इस विश्लेषण की निम्न तीन प्रभेदक विशेषतायें हैं—

(i) यह प्रविधि पूर्णतः तकनीकी प्रविधि है। इसमें उपलब्ध साधनों की मात्रा एवं तकनीकी स्थिति दी हुई होने पर क्या उत्पादन किया जा सकता है और प्रत्येक मध्यवर्ती वस्तु की कितनी मात्रा काम में ली जावे इसका निर्धारण होता है।

(ii) यह विश्लेषण अनुभवयुक्त अन्वेषण को समर्पित है। इसमें सामान्य सन्तुलन विश्लेषण की अपेक्षा तथ्यों की संख्या कम होती है। यह विश्लेषण केवल उत्पादन पक्ष पर विचार करता है। इसके अन्तर्गत उपयोगिता फलनों की अवहेलना की जाती है तथा उपभोक्ता मांग को बाह्य सूचना के आधार पर व्यक्त किया जाता है। फर्म की अपेक्षा उद्योग को उत्पादन की इकाई माना जाता है।

(iii) यह विश्लेषण 'सामान्य सन्तुलन' पर बल देता है। यह 'सामान्य सन्तुलन' इस दृष्टि से है कि इसमें अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य अन्तर-निर्भरता को ध्यान में रखा जाता है। लेकिन इस पद्धति से प्राप्त उत्पादन स्तर आवश्यक नहीं है कि बाजार संतुलन की शर्तों को पूरा करे।

आगत-निर्गत विश्लेषण हेतु सर्व प्रथम एक आगत-निर्गत सारणी तैयार की जाती है। इस हेतु सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को कई क्षेत्रों में बाँट दिया जाता है। अर्थप्रणाली में उत्पादन की इकाई उद्यम या फर्म होती है। समरूप वस्तु पैदा करने वाली फर्मों का समूह उद्योग होता है। उद्योग मिलकर क्षेत्र बनाते हैं। आगत - निर्गत विश्लेषण में वर्गीकरण एवं समूहन उद्योग या क्षेत्र के रूप में होता है। आगत-निर्गत विन्यास का जितना अधिक बिसमूहन होगा, क्षेत्रों की संख्या उतनी ही अधिक होगी।

लियोन्तीफ ने आगत-निर्गत विश्लेषण के तीन मुख्य मॉडल प्रस्तुत किये है-

(i) खुला मॉडल (Open model)

(ii) बन्द मॉडल (Closed model)

(iii) गत्यात्मक मॉडल (Dynamic model)

प्रथम दो मॉडल स्थैतिक विश्लेषण के अन्तर्गत आते हैं। हम खुला मॉडल के निर्माण एवं आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा इसका हल ज्ञात करेंगे।

13.3 आगत-निर्गत प्रतिरूप (माडल) की संरचना

स्थैतिक आगत-निर्गत विश्लेषण निम्न मान्यताओं पर आधारित होता है –

(i) समरूपता (Homogeneity) – प्रत्येक उद्योग केवल एक समरूप वस्तु का उत्पादन करता है। यदि दो या अधिक वस्तुयें संयुक्त रूप से उत्पादित होती हैं तो यह मान लिया जाता है कि विचारणीय वस्तु संयुक्त वस्तु है जो स्थिर अनुपात में उत्पादित कई वस्तुओं से बनी है।

(ii) आनुपातिकता (Proportionality) – प्रत्येक उद्योग अपनी वस्तु के उत्पादन में आगतों को एक निश्चित अनुपात में काम में लेता है। फलतः आगतों की मात्रा उत्पादन स्तर के अनुपात में बढ़ती है। इस प्रकार प्रत्येक उद्योग के निश्चित आगत गुणांक लेते हैं। इसका अभिप्राय यह हुआ कि भिन्न-भिन्न वस्तुओं में स्थानापन्नता नहीं होती और न ही कोई औद्योगिक उन्नति होती है।

(iii) उत्पादन सम्बंध एक घातीय होते हैं।

(iv) प्रत्येक उद्योग में पैमाने के समान प्रतिफल प्राप्त होते हैं। अर्थात प्रत्येक आगत में 'क' गुणा परिवर्तन करने पर उत्पादन में भी 'क' गुणा परिवर्तन होता है।

उपरोक्त मान्यताओं को ध्यान में रखकर समंको को एक सारणी के रूप में रखा जाता है जैसा सारणी - 1 में बताया गया है।

सारणी - 1

उत्पादक	उपयोग कर्त्ता				अन्तिम	कुल
	1	2		n	मांग	उत्पादन
1	b_{11}	b_{12}	::	b_{1n}	h_1	x_1
2	b_{21}	b_{22}	::	b_{2n}	h_2	x_2
3	b_{31}	b_{32}	::	b_{3n}	h_3	x_3
:	:	:		:	:	:
n	b_{n1}	b_{n2}	::	b_{nn}	h_n	x_n

उपरोक्त सारणी में b_{ij}, उद्योग j द्वारा i उद्योग के उत्पादन (निर्गत) की प्रयुक्त की गई मात्रा रूपये मूल्य में अभिव्यक्त की गई है। i उद्योग के उत्पादन की अन्तिम मांग h_i द्वारा बताई गई है।

$$\text{यहां } x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + h_i$$

है जो i उद्योग का कुल उत्पादन है। उपरोक्त सारणी में तीन उद्योग वाले मॉडल के आगत-निर्गत समंक रखने पर आगत-निर्गत सारणी (सारणी—2) बनती है। इस सारणी की सहायता से आदान-प्रादन आव्यूह (transaction matrix) की रचना की जाती है।

सारणी - 2

आगत - निर्गत सारणी

	उपयोग कर्त्ता उद्योग			अन्तिम	कुल
उत्पादक उद्योग	A	B	C	मांग	उत्पादन (निर्गत)
A	180	300	450	150	1080
B	270	300	600	30	1200
C	540	400	600	260	1800
कुल आगत	990	1000	1650	440	4080

उपरोक्त सारणी में प्रथम पंक्ति में A उद्योग की मांग (निर्गत का उपयोग) बताया गया है। कुल मांग 1080 लाख रुपये मूल्य की है जिसमें से स्वयं A उद्योग की मांग 180 लाख रुपये के बराबर है। A उद्योग द्वारा उत्पादित वस्तु की B एवं C उद्योग की मांग क्रमशः 300 लाख एवं 450 लाख रुपये की है। इसी प्रकार B उद्योग की कुल मांग 1200 लाख रुपये मूल्य की है, जिसमें से 300 लाख रुपये मूल्य की स्वयं B उद्योग की, 270 लाख रुपये मूल्य की A उद्योम की, 600 लाख रुपये मूल्य की C उद्योग की व 30 लाख रुपये मूल्य की अन्तिम मांग है। C उद्योग की कुल मांग 1800 लाख रुपये मूल्य की है। जिसमें से 600 लाख रुपये मूल्य का उत्पादन स्वयं यह उद्योग प्रयुक्त करता है और A व B उद्योग की मांग क्रमशः 540 व 400 लाख रुपयें मूल्य की है। C उद्योग की अन्तिम मांग 260 लाख रुपये मूल्य के बराबर है। इस प्रकार प्रत्येक पंक्ति सम्बन्धित उद्योग का निर्गत वितरण बताती है।

प्रथम स्तम्भ उपयोगकर्त्ता A की आवश्यकताओं (आगत-क्रय) को और द्वितीय एवं तृतीय स्तम्भ क्रमशः B व C की आवश्यकताओं को प्रदर्शित करते हैं। तीनों उपयोगकर्त्ताओं की कुल मांग कुल उत्पादन के बराबर है, अर्थात कुल निर्गत (रु. 4080 लाख) व कुल आगत समान है।

आगत-निर्गत का मापन भौतिक इकाइयों अथवा मुद्रा इकाइयों में किया जा सकता है। भौतिक इकाइयों (किलोग्राम, मीटर आदि) में व्यक्त

करने पर अलग-अलग उद्योग में भौतिक इकाई अलग-अलग होने से स्तम्भानुसारयोग नहीं हो सकता। केवल पंक्ति अनुसार योग हो सकता है। आगत-निर्गत को मुद्रा इकाइयों में व्यक्त करने पर हम पंक्ति तथा स्तम्भ दोनों प्रकार से योग कर सकते हैं।

सारणी-2 निर्गतों के अन्तंउद्योग प्रवाह को प्रदर्शित करती **है। यह** दिये हुये आधार वर्ष में अर्थव्यवस्था के उत्पादन संतुलन की **स्थिति है।**

सारणी-2 में दिये गये समंकों के आधार पर तकनीकी गुणांकों की गणना की जा सकती है। सारणी-3 तकनीकी गुणांकों (Technical Coefficients) को प्रदर्शित करती है, जिन्हें सारणी-2 में बताये समंको के आधार पर परिकलित किया गया है। इन्हें आगत गुणांक (Input Coefficients) भी कहा जाता है।

सारणी - 3

आगत-निर्गत गुणांक

उत्पादक		उपयोग कर्त्ता A x_1	B x_2	C x_3	अन्तिम मांग x_4
A	x_1	0.167 (a_{11})	0.250 (a_{12})	0.250 (a_{13})	150 (0.341)
B	x_2	0.250 (a_{21})	0.250 (a_{22})	0.333 (a_{23})	3 (0.068)
c	x_3	0.500	0.333	0.333	260 (0.591) 440
योग		**0.917**	**0.833**	**0.916**	**(1.000)**
प्राथमिक आगत	x_4	0.083	0.167	0.084	—
समस्त योग		**1.000**	**1.000**	**1.000**	—

सारणी-3 में प्रदर्शित गुणांक निम्नानुसार प्राप्त हुये हैं —

$$a_{11} = \frac{180}{1080} = 0.167 \quad a_{12} = \frac{300}{1200} = 0.250 \quad a_{13} = \frac{450}{1800} = 0.250$$

$$a_{21} = \frac{270}{1080} = 0.250 \quad a_{22} = \frac{300}{1200} = 0.250 \quad a_{23} = \frac{600}{1800} = 0.333$$

$$a_{31} = \frac{540}{1080} = 0.500 \quad a_{23} = \frac{400}{1200} = 0.333 \quad a_{33} = \frac{600}{1800} = 0.333$$

इन गुणांकों को एक मैट्रिक्स के रूप में रखने पर A मैट्रिक्स प्राप्त होती है:

$$A \begin{bmatrix} 0.167 & 0.250 & 0.250 \\ 0.250 & 0.250 & 0.333 \\ 0.500 & 0.333 & 0.333 \end{bmatrix} \text{ अथवा } \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

संक्षेप में $A = (a_{ij})$

यह मैट्रिक्स (A) जो आगत-निर्गत अनुपातों से बनी है अर्थप्रणाली की संरचना को बताती है। इसके सभी अव्यव अऋणात्मक (≥ 0) हैं। इसे प्राविधिक आव्यूह या तकनीकी मैट्रिक्स (Technological Matrix) कहा जाता है। इस मैट्रिक्स में गुणांक

$$(a_{ij}) = \frac{b_{ij}}{x_j} \text{ है}$$

अर्थात् i उद्योग के उत्पादन का रूपया मूल्य है जिसे j उद्योग को अपना एक रूपये मूल्य का उत्पादन करने के लिये खरीदना होगा। यहां यह मान लिया गया है कि मध्यवर्ती वस्तुओं का क्रय उस उद्योग में उत्पादन के अनुपात में होता है। आगत-निर्गत विश्लेषण में परम्परागत रूप से इन अनुपातों को स्थिर माना जाता है।

सारणी-3 हमें तकनीकी गुणांकों के रूप में प्रत्येक उद्योग की आगत मांग एवं निर्गत बंटन को बताती है। सारणी - 2 व 3 की सूचनाओं को निम्न प्रकार से तीन समीकरणों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। ये समीकरणें क्रमशः A, B व C उद्योग के उत्पादन बंटन को बताती है।

$$x_1 = 0.167\ x_1 + 0.25\ x_2 + 0.25\ x_3 + 150 \qquad \text{(i)}$$
$$x_2 = 0.25\ x_1 + 0.25\ x_2 + 0.33\ x_3 + 30 \qquad \text{(ii)}$$
$$x_3 = 0.5\ x_1 + 0.33\ x_2 + 0.33\ x_3 + 260 \qquad \text{(iii)}$$

इन उत्पादन बंटन अथवा संतुलन समीकरणों को मैट्रिक्स संकेतन-पद्धति में इस प्रकार लिखा जा सकता है —

$$x = Ax + y \text{ अथवा } (I — A)\ x = y$$

$$\text{जबकि } A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.167 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix}}_{\text{तकनीकी आव्यूह}}, \quad x = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\text{उद्योग सदिश}}, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 150 \\ 30 \\ 260 \end{bmatrix}}_{\text{अन्तिम मांग सदिश}}$$

अथवा $x = (I—A)^{-1} y$

जहाँ I इकाई मैट्रिक्स है।

इकाई - 11 में आव्यूह बीजगणित की पद्धति से युगपत समीकरणों के समुच्चय का अनन्य हल ज्ञात करना आप सीख चुके हैं। इसी पद्धति का अनुसरण कर हम उपरोक्त समस्या को हल करें तो हमें दी हुई अन्तिम मांग की पूर्ति हेतु A, B, एवं C उद्योगों में वांछित उत्पादन स्तर ज्ञात हो जावेगा।

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 14 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[I—A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} — \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/6 & —1/4 & —1/4 \\ —1/4 & 3/4 & —1/3 \\ —1/2 & —1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$|I\text{-}A| = \frac{5}{6}\left[(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}) - (\frac{-1}{3} \times \frac{-1}{3})\right] - (-)\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} - (-\frac{1}{2} \times -\frac{1}{3})\right]$$

$$+ (-)\ \frac{1}{4}\left[(-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3}) - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{109}{864}$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

$$[I—A]^{-1} = \frac{864}{109} \begin{bmatrix} 7/18 & 1/4 & 13/48 \\ 1/3 & 31/72 & 49/144 \\ 11/24 & 29/72 & 9/16 \end{bmatrix}$$

$$x = [I—A]^{-1}\ y = \frac{864}{109} \begin{bmatrix} 7/18 & 1/4 & 13/48 \\ 1/3 & 31/72 & 49/144 \\ 11/24 & 29/72 & 9/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 30 \\ 260 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \frac{864}{109} \begin{bmatrix} 136.25 \\ 151.39 \\ 227.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1080 \\ 1200 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

[I—A] की सहखण्ड मैट्रिक्स (co-factor matrix) के अवयव निम्नानुसार प्राप्त हुये हैं :-

$$c_{11} = (—1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3/4 & —1/3 \\ —1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = 7/8$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1/4 & -1/3 \\ -1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/3$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 1/3 \end{vmatrix} = 11/24$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1/4 & -1/3 \\ -1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/4$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5/6 & -1/4 \\ -1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 31/72$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5/6 & -1/4 \\ -1/2 & -1/3 \end{vmatrix} = 29/72$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1/4 & -1/4 \\ +3/4 & -1/3 \end{vmatrix} = 13/48$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5/6 & -1/4 \\ -1/4 & -1/3 \end{vmatrix} = 49/144$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5/6 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{vmatrix} = 9/16$$

सहखण्ड या मैट्रिक्स का ट्रांसपोज या

अथवा $\begin{bmatrix} 7/18 & 1/3 & 11/24 \\ 1/4 & 31/72 & 29/72 \\ 13/48 & 49/144 & 9/16 \end{bmatrix}$ $\text{Adj } [I-A] = \begin{bmatrix} 7/18 & 1/4 & 13/48 \\ 1/3 & 31/72 & 49/144 \\ 11/24 & 29/72 & 9/16 \end{bmatrix}$

इस प्रकार तकनीकी-गुणांक A आव्यूह के अनुसार और अन्तिम मांग y वैक्टर होने पर A, B, एवं C उद्योगों का कुल उत्पादन स्तर क्रमशः 1080, 1200 एवं 1800 लाख रूपये मूल्य का होना चाहिए।

यदि अन्तिम मांग A उद्योग की 225, B उद्योग की 45 और C उद्योग की 390 लाख रूपये मूल्य की हो तो कुल उत्पादन निम्नानुसार होगा –

$$x = 864/109 \begin{bmatrix} 7/18 & 1/4 & 13/48 \\ 1/3 & 31/72 & 49/144 \\ 11/24 & 29/72 & 9/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 225 \\ 45 \\ 390 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{864}{109} \begin{bmatrix} 87.5 + 11.25 + 105.62 \\ 75.0 + 19.38 + 132.71 \\ 103.12 + 18.12 + 219.38 \end{bmatrix} = \frac{864}{109} \begin{bmatrix} 204.37 \\ 227.09 \\ 340.62 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1620 \\ 1800 \\ 2700 \end{bmatrix}$$

A, B और C उद्योग में वांछनीय उत्पादन स्तर क्रमशः 1620, 1800 एवं 2700 लाख रूपये का होगा।

इस प्रकार हम आव्यूह बीज गणित का उपयोग करके अर्थव्यवस्था की अन्तिम मांग की पूर्ति के लिये विभिन्न उद्योगों में वांछनीय उत्पादन स्तर ज्ञात कर सकते हैं।

अब हम लियोन्तिफ के खुले एवं बन्द स्थैतिक मॉडल में आव्यूह बीजगणित का उपयोग करना सीखेंगे।

उदाहरण - 1 दो उद्योगों की सरल अर्थव्यवस्था निम्न तालिका में दर्शायी गयी है। (आंकड़े करोड़ रूपयों में उत्पादन को बताते हैं):

	उपयोग कर्त्ता उद्योग		अन्तिम	कुल
उत्पादक उद्योग	A	B	मांग	उत्पत्ति
A	15	24	21	60
B	20	12	16	48

अन्तिम मांग A उद्योग के लिये 20 करोड़ रूपये और B उद्योग के लिये 40 करोड़ रूपये मूल्य की होने पर A व B उद्योग का उत्पादन स्तर निर्धारित कीजिए।

हल —

(i) तकनीकी गुणांक निम्नानुसार प्राप्त करेंगे :-

$$\frac{15}{60} = \frac{1}{4} \qquad \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20}{60} = \frac{1}{3} \qquad \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

अतः तकनीकी गुणांक मैट्रिक्स है $A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$

(ii) A व B उद्योग का उत्पादन बंटन समीकरण होगा

$$x_A = \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + 21$$

$$x_B = \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + 16$$

(iii) मैट्रिक्स संकेतों में रखने पर

$x = [I - A]^{-1}y$

जहाँ x = विभिन्न उद्योगों में उत्पत्ति का स्तम्भ सदिश $\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$

I = एकांक आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A = तकनीकी आव्यूह $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$

Y = अन्तिम मांग स्तम्भ सदिश = $\begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix}$

हम इन आव्यूहों को निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} x_A \\ x_B \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix}$$

यह सम्बन्ध x = Ax + d प्रणाली का सूचक है

इकाई - 11 में आप जान चुके हैं कि किसी भी आव्यूह को उसी क्रम की एकांक (ईकाई) आव्यूह (**Identity matrix**) से गुणा करने पर वही आव्यूह प्राप्त होती है अतः Ix = x होता है।

इसलिये $Ix = Ax + d$

अथवा $Ix - Ax = d$

$[I - A]\, x = d$

$x = [I - A]^{-1}\ d$

$(I - A)^{-1}$ को लियोन्तीफ इन्वर्स कहा जाता है।

अतः

$$x = \begin{bmatrix} 1 - 1/4 & 0 - 1/2 \\ 0 - 1/3 & 1 - 1/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/3 & 3/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$c_{11} = (-1)^{1+1}\ |3/4| = 3/4$, $c_{21} = (-1)^{2+1}\ |-1/2| = 1/2$
$c_{12} = (-1)^{1+1}\ |-1/3| = 1/3$ $c_{22} = (-1)^{2+2}\ |3/4| = 3/4$

अतः A मैट्रिक्स की सहखण्ड मैट्रिक्स = $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$

सहखण्ड मैट्रिक्स का ट्रांसपोज या AdjA = $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 \end{bmatrix}$

$|I - A| = (3/4 \times 3/4) - (-1/3 \times -1/2) = 9/16 - 1/6$

$$= \frac{19}{48}$$

अतः $x = \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \left(A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|}\right)$

$$= \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 3/4 \times 21 + 1/2 \times 16 \\ 1/3 \times 21 + 3/4 \times 16 \end{bmatrix} = \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 63/4 + 8 \\ 7 + 12 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 95/4 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 48 \end{bmatrix}$$

यदि अन्तिम मांग A उद्योग की 20 करोड़ रूपये और B उद्योग की 40 करोड़ रुपये हो जाती है तो अन्तिम मांग सदिश $y = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \end{bmatrix}$ होगा।

अतः $x = [I - A]^{-1}y = 48/19 \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/3 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \end{bmatrix}$

$$= \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 3/4 \times 20 + 1/2 \times 40 \\ 1/3 \times 20 + 3/4 \times 40 \end{bmatrix} = \frac{48}{19} \begin{bmatrix} 35 \\ 110/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 889.42 \\ 92.63 \end{bmatrix}$$

A एवं B उद्योग का उत्पादन स्तर क्रमशः 88.42 एवं 92.63 करोड़ रुपये मूल्य का होना चाहिये।

अभ्यास–1 दो उद्योगों की एक सरल अर्थव्यवस्था निम्न तालिका में दर्शायी गई है। (आंकड़े करोड़ रुपयों में उत्पादन को बताते हैं)

उत्पादक	उपयोग कर्त्ता A	B	अन्तिम मांग	कुल मांग
A	140	60	80	280
B	70	180	110	360

अर्थव्यवस्था के लिये उत्पादन सदिश निर्धारित कीजिये जबकि

(i) अन्तिम मांग A एवं B उद्योग की क्रमशः 160 एवं 30 करोड़ रु. मूल्य की हो।

(ii) अन्तिम मांग A एवं B उद्योग की बदलकर 20 एवं 40 हो जावे।

13.4 खुला प्रतिरूप (Open model)

हमारे प्रतिरूप में n उद्योगों के साथ एक खुला क्षेत्र (जैसे परिवार) हो जो बहिर्जात रूप से प्रत्येक उद्योग की अन्तिम मांग (गैर-आगत मांग) को निर्धारित करे और प्राथमिक आगतों (जैसे श्रम सेवायें, जिन्हें 'n' उद्योगों द्वारा उत्पादित नहीं किया जाता, की पूर्ति करें, तो हमारा प्रतिरूप (model) खुला प्रतिरूप होगा।

खुला मॉडल होने से, आगत-गुणांक आव्यूह A के प्रत्येक स्तम्भ में अवयवों का योग एक से कम होना चाहिए। प्रत्येक स्तम्भ का योग, एक रुपया मूल्य की कोई वस्तु पैदा करने के लिये, आंशिक आगत-लागत (प्राथमिक आगतों की लागत शामिल न होने से) को बताता है। यदि यह योग एक रूपये के बराबर या अधिक हो तो उत्पादन आर्थिक दृष्टि से समर्थनीय नहीं होगा। हम इस तथ्य को संकेत रूप में निम्न प्रकार से बतावेंगें —

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

यहां योग i का किया जाना है अर्थात j स्तम्भ में विभिन्न पंक्तियों का योग

इस प्रकार प्रत्येक स्तम्भ का योग एक रुपये से जितना कम है वह प्राथमिक आगतों की लागत है। इसलिये हम j वस्तु की एक इकाई उत्पादन के लिये प्राथमिक साधनों की मांग

$$1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$ होगी।

यदि उद्योग A को केवल इतना उत्पादन करना है कि जिससे n उद्योगों की आगत आवश्यकता एवं खुले क्षेत्र की अन्तिम मांग पूरी हो जावे, तो इसका उत्पादन स्तर x_1 निम्न समीकरण को संतुष्ट करेगा :

$$x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + d_1$$

अथवा $(1 - a_{11}) x_1 - a_{12} x_2 - \ldots\ldots - a_{1n} x_n = d_1$

जहां d_1 इस उद्योग (A) की अन्तिम मांग को दर्शाता है।

$a_{ij} x_j$ j वें उद्योग की आगत मांग को बताता है। यहां अन्तिम समीकरण में प्रथम गुणांक $(1 - a_{11})$ के अतिरिक्त अन्य सभी गुणांक तकनीकी गुणांक सारणी से यथावत स्थानान्तरित होते हैं केवल अन्तर यह होता है कि यहां उनका चिह्न धन के स्थान पर ऋण का हो जाता है। यह A उद्योग की उत्पादन आबंटन समीकरण या संतुलन समीकरण है।

n उद्योगों की आगत-गुणांक मैट्रिक्स को हम निम्न प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं :-

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} A & B & C & \ldots\ldots & N \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ \ldots \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

B उद्योग के लिये उत्पादन स्तर निर्धारित करने वाली उत्पादन आबंटन समीकरण में उपरोक्त मैट्रिक्स की दूसरी पंक्ति में दर्शाये गुणांक ऋणात्मक चिह्न के साथ होंगे ओर x_2 चर का गुणांक $-a_{22}$ के स्थान पर $1-a_{22}$ होगा। इस प्रकार n उद्योगों के एक समुच्चय के लिए सही उत्पादन स्तर को n रैखीक समीकरणों की प्रणाली द्वारा संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है :

$$
\begin{array}{llll}
(1-a_{11})\,x_1 - & a_{12}\,x_2 - \ldots\ldots & -\,a_{1n}\,x_n & = d_1 \\
-\,a_{21}\,x_1 + & (1-a_{22})\,x_2 - \ldots & -\,a_{2n}\,x_n & = d_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
-\,a_{n1}\,x_1 - & a_{n2}\,x_2 - \ldots\ldots & +\,(1-a_{nn})\,x_n & = d_n
\end{array}
$$

मैट्रिक्स संकेतन में इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है —

$$
\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{bmatrix}
$$

यदि बायीं ओर की मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण में से 1 संख्या को सभी स्थानों से हटा दिया जाय तो मैट्रिक्स एकदम $-A = [-a_{ij}]$ है। दूसरे शब्दों में कहें तो बायीं ओर की यह मैट्रिक्स इकाई मैट्रिक्स (ऐसी वर्ग मैट्रिक्स जिसमें मुख्य विकर्ण में 1 हो और अन्य सभी अव्यव शून्य हों) एंव $-A$ मैट्रिक्स का योग है। अतः उपरोक्त समुच्चय को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$(I - A)\,x = d$$

जहां x एवं d क्रमशः चर सदिश एवं अन्तिम-मांग सदिश को बताते हैं। मैट्रिक्स $(I - A)$ को लियोन्तिफ आव्यूह (Leontief Matrix) कहा जाता है।

इस प्रकार इस प्रणाली को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है —

$$Tx = d$$

T मैट्रिक्स अव्युत्क्रमणीय (ऐसा मैट्रिकस जिसका सारणिक मान शून्य हो) न होने पर इसका प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है और समीकरण प्रणाली का अनन्य हल निकाला जा सकता है। दूसरे शब्दों में T मैट्रिक्स

का प्रतिलोम तभी ज्ञात किया जा सकता है जब यह वर्ग मेट्रिक्स हो और उसका सारणिक मान अशून्य हो। ऐसी स्थिति में हम उपरोक्त प्रणाली को इस रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं:

$$\bar{x} = T^{-1} d = (I - A)^{-1} d$$

$(I-A)^{-1}$ को लिओन्टीफ इनवर्स (Leontief Inverse) कहा जाता है। इससे आगत-निर्गत मॉडल को हल करने में सहायता मिलती है।

इस प्रकार अन्तिम मांग एवं तकनीकी गुणांक ज्ञात होने पर हम विभिन्न पारस्परिक निर्भरता वाले क्षेत्रों से कितने-कितने उत्पादन की आवश्यकता होगी, यह परिकलित कर सकते हैं। हम एक संख्यात्मक उदाहरण द्वारा खुले मॉडल की संरचना व उपयोग को समझेंगे।

उदाहरण — 2

एक तीन क्षेत्रीय अर्थव्यवस्था का आगत-निर्गत मुद्रा प्रवाह निम्नानुसार है।

(लाख रूपये में)

उत्पादक क्षेत्र	उपयोगकर्त्ता क्षेत्र कृषि	उद्योग	सेवा	अन्तिम मांग	सकल (निर्गत)
कृषि	84	68	28	100	280
उद्योग	56	0	70	44	170
सेवा	28	51	14	47	140
योग	168	119	112	191	590
प्रारम्भिक आगत	112	51	28	—	—
सकल योग	280	170	140	—	—

हल :-

कृषि क्षेत्र (x_1) के लिए (प्रथम स्तम्भ) के लिये तकनीकी गुणांकों का परिकलन

$$\frac{84}{280} = 0.3 \; ; \; \frac{56}{280} = 0.2 \; ; \frac{28}{280} = 0.1 \; ; \frac{112}{280} = 0.4$$

उद्योग क्षेत्र (x_2) के लिए तकनीकी गुणांक

$$\frac{68}{170} = 0.4 \; ; \; \frac{0}{170} = 0.0 \; ; \frac{51}{170} = 0.3 \; ; \frac{51}{170} = 0.3$$

सेवा क्षेत्र (x_3) के लिये तकनीकी गुणांक

$$\frac{28}{140} = 0.2 \; ; \; \frac{70}{140} = 0.5 \; ; \frac{14}{140} = 0.10 \; ; \frac{28}{140} = 0.2$$

आगत-निर्गत गुणांक सारणी

उत्पादक क्षेत्र		उपयोगकर्त्ता क्षेत्र कृषि x_1	उद्योग x_2	सेवा x_3
कृषि	x_1	0.3	0.4	0.2
उद्योग	x_2	0.2	0.0	0.5
सेवा	x_3	0.1	0.3	0.1
योग		0.6	0.7	0.8
प्राथमिक आगत	x_4	0.4	0.3	0.2
समस्त योग		1.0	1.0	1.0

उत्पादन आबंटन समीकरणें निम्न होंगी :—

$$x_1 = 0.3\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.2x_3 + 100 \qquad \text{(i)}$$
$$x_2 = 0.2\ x_1 + 0.0\ x_2 + 0.5\ x_3 + 44 \qquad \text{(ii)}$$
$$x_3 = 0.1\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.1\ x_3 + 47 \qquad \text{(iii)}$$

इन समीकरणों को मैट्रिक्स संकेतन पद्धति में इस प्रकार लिखा जावेगा —

$$x = Ax + y \qquad \text{अथवा } x = (I - A)^{-1}y$$

जहां $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 100 \\ 44 \\ 47 \end{bmatrix}$

$$[I—A] = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1.0 & -05 \\ -0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$|I—A| = 0.7 \begin{vmatrix} 1.0 & -0.5 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} (—)(—0.4) \begin{vmatrix} -0.2 & -0.5 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix}$$

$$+ (-0.2) \begin{vmatrix} -0.2 & 1.0 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix}$$

$$= 0.7\ (0.9 - 0.15) + 0.4\ (-0.18 - 0.05$$
$$- 0.2\ (+0.06 + 0.1)$$

$$= (0.7 \times .75) + (0.4 \times -0.23) - (0.2 \times 0.16)$$

$$= 0.525 - 0.092 - 0.032 = 0.401$$

[I — A] का सहखण्ड मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1.0 & -0.5 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} -0.2 & -0.5 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0.2 & 1.0 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix} \\ (-)\begin{vmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 0.7 & -0.4 \\ -0.1 & -0.3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0.4 & -0.2 \\ 1.0 & -0.5 \end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix} 0.7 & -02 \\ -0.2 & -0.5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.7 & -0.4 \\ -0.2 & 1.0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.75 & 0.23 & 0.16 \\ 0.42 & 0.61 & 0.25 \\ 0.40 & 0.39 & 0.62 \end{bmatrix}$$

[I—A] के सहखण्ड आव्यूह (मैट्रिक्स) का पक्षान्तरणित (Transpose)

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.42 & 0.40 \\ 0.23 & 0.61 & 0.39 \\ 0.16 & 0.25 & 0.62 \end{bmatrix} = \text{Adj } [I-A]$$

$$[I - A]^{-1} = \frac{\text{Adj. } [I-A]}{|I-A|} = \frac{1}{0.401} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.42 & 0.40 \\ 0.23 & 0.61 & 0.39 \\ 0.16 & 0.25 & 0.62 \end{bmatrix}$$

अतः

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.401} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.42 & 0.40 \\ 0.23 & 0.61 & 0.39 \\ 0.16 & 0.25 & 0.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 44 \\ 47 \end{bmatrix}$$

क्योंकि $x = [I-A]^{-1}y$

$$x_1 = 1/0.401\ [(0.75 \times 100) + (0.42 \times 44) + (0.40 \times 47)]$$
$$= 1/0.401\ [75 + 18.48 + 18.8] = 1/0.401\ [112.28]$$
$$= 280$$

$$x_2 = 1/0.401\ [(0.23 \times 100) + (0.61 \times 44) + (0.39 \times 47)]$$
$$= 1/0.401\ [23 + 26.84 + 18.33] = 1/0.401\ [68.17]$$
$$= 170$$

$$x_3 = 1/0.401\ [0.16 \times 100) + (0.25 \times 44) + (0.62 \times 47)]$$
$$= 1/0.401\ [16 + 11 + 29.14] = 1/0.401\ [56.14]$$
$$= 140$$

आगत-निर्गत गुणांक सारणी के अनुसार एक रुपया मूल्य के उत्पादन के लिये तीनों क्षेत्रों में प्राथमिक आगत की मात्रा क्रमशः 0.4, 0.3 एवं **0.2** है, अतः तीनों क्षेत्रों के लिये प्राथमिक आगत की कुल आवश्यकता

$$0.4\ (280) + 0.3\ (170) + 0.2\ (140) = 112 + 51 + 28 = 191$$

इस प्रकार विशिष्ट मांग 44 उत्पादन के लिये $\begin{bmatrix} 100 \\ 191 \\ 47 \end{bmatrix}$ लाख रुपये मूल्य के प्राथमिक आगत आवश्यक होंगे। यदि अर्थप्रणाली में इतनी मात्रा में प्राथमिक आगत उपलब्ध नहीं है तो उत्पादन लक्ष्यों को घटाना होगा।

अन्तिम मांग कृषि क्षेत्र की **150**, उद्योग की 50 एवं सेवा क्षेत्र की 60 होने पर अर्थप्रणाली की मांग सदिश निम्न होगा –

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1/0.401 \begin{bmatrix} 0.75 & 0.42 & 0.40 \\ 0.23 & 0.61 & 0.39 \\ 0.16 & 0.25 & 0.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{0.401} [(0.75 x 150) + (0.42 x 50) + (0.40 x 60)] = \frac{157.5}{0.401} = 392.8$$

$$x_2 = \frac{1}{0.401} [(0.23 x 150) + (0.61 x 50) + (0.39 x 60)] = \frac{88.4}{0.401} = 220.4$$

$$x_3 = \frac{1}{0.401} [(0.16 x 150) + (0.25 x 50) + (0.62 x 60)] = 1 \frac{73.7}{0.401} = 183.8$$

	अन्तिम मांग	कुल मांग
कृषि	150	392.8
उद्योग	50	220.4
सेवा	60	183.8

उदाहरण - 3 तीन उद्योगों A, B एवं C की एक सरल अर्थव्यवस्था निम्न सारणी द्वारा दर्शायी गई है (आंकड़े करोड़ रुपयों में हैं)

उत्पादक	उपयोगकर्ता A	B	C	अन्तिम मांग	कुल उत्पादन
A	8	10	10	4	32
B	8	20	6	6	40
C	8	10	10	2	30

अर्थप्रणाली में अन्तिम मांग A की 12, B की 4 एवं C की 1 होने पर उत्पादन स्तर निर्धारित कीजिये।

हल -

A उद्योग के लिये तकनीकी गुणांक $\frac{8}{32} = 0.25, \frac{8}{32} = 0.25, \frac{8}{32} = 0.25$

B उद्योग के लिये तकनीकी गुणांक $\frac{10}{40} = 0.25, \frac{20}{40} = 0.5, \frac{10}{40} = 0.25$

C उद्योग के लिये तकनीकी गुणांक $\frac{10}{30} = 0.33, \frac{6}{30} = 0.2, \frac{10}{30} = 0.33$

आगत गुणांक आव्यूह A

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.33 \\ 0.25 & 0.50 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.33 \end{bmatrix}$$

विभिन्न उद्योगों में उत्पादन सदिश $= x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

अन्तिम मांग सदिश $= y = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = [I - A]^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[I—A] = \begin{bmatrix} 0.75 & —0.25 & —0.33 \\ —0.25 & 0.50 & —0.20 \\ —0.25 & —0.25 & 0.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 & —1/4 & —1/3 \\ —1/4 & +1/2 & —1/5 \\ —1/4 & —1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$|I—A| = [3/4\ (1/2 \times 2/3) — (—1/4 \times —1/5)]\ (—)\ [—1/4\ \{(—1/4 \times 2/3) — (—1/4 \times —1/5)\}] + [—1/3\ \{(—1/4 \times 1/4) — (—1/4 \times 1/2)\}]$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

$= [3/4\ (1/3—1/20)] — [—1/4\ (—1/6—1/20)] + [—1/3\ (1/16+1/8)]$

$= [3/4 \times 17/60] — [—1/4 \times —13/60] + [—1/3 \times +3/16]$

$= 17/80 — 13/240 — 1/16 = (51—13—15)/240 = 23/240$

[I — A] का सहखण्ड आव्यूह

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & —1/5 \\ —1/4 & 2/3 \end{vmatrix} & (—)\begin{vmatrix} —1/4 & —1/5 \\ —1/4 & 2/3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} —1/4 & 1/2 \\ —1/4 & —1/4 \end{vmatrix} \\ (—)\begin{vmatrix} —1/4 & —1/3 \\ —1/4 & 2/3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/4 & —1/3 \\ —1/4 & 2/3 \end{vmatrix} & (—)\begin{vmatrix} 3/4 & —1/4 \\ —1/4 & —1/4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} —1/4 & —1/3 \\ 1/2 & —1/5 \end{vmatrix} & (—)\begin{vmatrix} 3/4 & —1/3 \\ —1/4 & —1/5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/4 & —1/4 \\ —1/4 & 1/2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17/60 & 13/60 & 3/16 \\ 1/4 & 5/12 & 1/4 \\ 13/60 & 7/30 & 5/16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj. } [I — A] = \frac{240}{23} \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{240}{23} \begin{bmatrix} 17/60 & 1/4 & 13/60 \\ 13/60 & 5/12 & 7/30 \\ 3/16 & 1/4 & 5/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{240}{23} [(17/60) \times 12 + (1/4)\times 4 + ((13/60)\times 1)] = \frac{240}{23} \times \frac{277}{60} = 48.1739$$

$$x_2 = \frac{240}{23} [(13/60)\times 12 + ((5/12)\times 4) + (7/30)\times 1)] = \frac{240}{23} \times \frac{135}{30} = 46.9565$$

$$x_3 = \frac{240}{23} [(3/16)\times 12) + ((1/4)\times 4) + ((5/16)\times 1)] = \frac{240}{23} \times \frac{57}{16} = 37.1739$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.1739 \\ 46.9565 \\ 37.1739 \end{bmatrix}$$

अभ्यास - 2

2.1 यदि $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$ हो और $d = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ हो (करोड़ रु. में) तो

(i) x_1, x_2, व x_3 की उत्पत्ति मात्रा निर्धारित कीजिये।

(ii) प्राथमिक आगत की कुल राशि निकालिये जिसका उपलब्ध होना आवश्यक है।

2.2 निम्न तकनीकी मैट्रिक्स एवं अन्तिम उपभोक्ता मांग से A, B, और C उद्योगों का सकल उत्पादन स्तर निर्धारित कीजिये

	A	B	C	उपभोक्ता मांग (करोड़ रूपयों में)
A	0.2	0.4	0.5	7
B	0.5	0.1	0.1	6
C	0.1	02	0.1	9
श्रम	0.2	0.3	0.3	—

श्रम की कुल आवश्यकता कितनी होगी?

2.3 A, B एवं C तीन उद्योगों का आगत-निर्गत आव्यूह एवं अन्तिम मांग सदिश निम्न होने पर उत्पादन सदिश निर्धारित कीजिये —

आगत-निर्गत आव्यूह | मांग सदिश

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}$$

यदि A उद्योग की मांग में 10 इकाई कमी होती है, B की मांग 5 इकाई बढ़ जाती है और C की भी 10 इकाई बढ़ जाती है तो परिवर्तित मांग की पूर्ति के लिये प्रत्येक उद्योग में उत्पादन स्तर क्या होना चाहिये?

2.4 तकनीकी आव्यूह एवं उपभोक्ता मांग निम्नानुसार होने पर A, B एवं C उद्योग में सकल उत्पादन स्तर एवं श्रम की आवश्यकता निर्धारित कीजिये —

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \text{श्रम} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{उपभोक्ता मांग (लाख रुपये)} \\ 80 \\ 120 \\ 90 \\ \\ \end{array}$$

2.5 निम्नांकित आव्यूह से प्रत्येक उद्योग का अन्तिम उत्पादन लक्ष्य निर्धारित कीजिये जबकि उपभोक्ता मांग स्पात की रु. 80 करोड़, कोयले की रु. 30 करोड़ एवं रेलवे परिवहन की रु. 50 करोड़ हो:

	स्पात	कोयला	रेल परिवहन
स्पात	0.3	0.2	0.2
कोयला	0.2	0.1	0.5
रेल परिवहन	0.2	0.4	0.2
श्रम	0.3	0.3	0.1

तीन उद्योगों के अन्तिम उत्पादन हेतु श्रम की आवश्यकता कितनी होगी?

प्रणाली की व्यवहार्यता (The Viability of the System)

कभी-कभी आगत-निर्गत आव्यूह का हल ऋणात्मक उत्पादन प्रदान कर सकता है। यदि हमारा हल ऋणात्मक उत्पादन बताता है तो उसका तात्पर्य यह होगा कि वह उद्योग एक टन माल पैदा करने के लिये अपने उत्पादन की एक टन से अधिक मात्रा प्रयुक्त करता है जो निश्चित रूप से अवास्तविक स्थिति है। इस प्रकार की प्रणाली व्यवहार्य प्रणाली नहीं हैं।

हॉकिन्स-साइमन शर्तें इस प्रकार की सम्भाव्यता पर रोक है।

हमारी आधारभूत समीकरण $x = [I—A]^{-1}\, y$ है। इसका हल ऋणात्मक मात्रायें प्रदान न करें इस हेतु आव्यूह [I—A]

$$[I—A] = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार का होना चाहिए कि –

(i) आव्यूह का सारणिक सदैव धनात्मक हो : ... $|I - A| > 0$

(ii) मुख्य विकर्ण के सभी अव्यव : $1 - a_{11}$, $1- a_{22}$, $1- a_{33}$ धनात्मक हों अर्थात् अवयव a_{11}, a_{22}, a_{33} ..... a_{nn} एक से कम होने चाहियें। किसी भी क्षेत्र में एक इकाई उत्पादन के लिये इसके अपने उत्पादन की एक से अधिक इकाई प्रयुक्त नहीं की जानी चाहिए। अर्थात् सभी i व j के लिये $1 . > a_{ij} \geq 0$

इन शर्तों को हॉकिन्स — साइमन शर्ते कहा जाता है। जो प्रणाली इन शर्तों को पूरा करती है वह ही व्यवहार्य होती है।

Note : Students are requisted to refer to Dorfman, Samuels on and Sohow for furher details

अभ्यास - 4

4.1 यदि $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ हो और अन्तिम मांग

(क) $(d) = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ हो (ख) $d = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

(i) x_1, x_2 एवं x_3 की उत्पत्ति मात्रा ज्ञात कीजिये।

(ii) प्राथमिक आगत की कुल राशि निकालिये जिसका उपलब्ध होना आवश्यक है।

4.2 क्या निम्न आव्यूह व्यवहार्य हैं?

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 4 \\ 0.02 & .3 \end{bmatrix}$$

4.3 एक द्वि-क्षेत्रीय अर्थव्यवस्था के लिये तकनीकी गुणांक आव्यूह A निम्न है

$$A = \begin{bmatrix} d & 4 \\ 0.05 & 0.5 \end{bmatrix}$$

d का अधिकतम मूल्य बताइये जिसके लिए अर्थप्रणाली व्यवयहार्य हो।

4.4 निम्न सूचनाओं के आधार पर x_1 एवं x_2 का सही उत्पादन स्तर ज्ञात कीजिये —

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 \\ 0.60 & 0.20 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4.5 यदि $[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो ओर तीन क्षेत्रों

का सकल उत्पादन स्तर $x_1 = 4000$, $x_2 = 2000$ एवं $x_3 = 1000$ इकाई हो तो अन्तिम मांग सदिश ज्ञात कीजिये।

4.6 हाकिन्स-साइमन शर्तों के आधार पर जांच कीजिये कि निम्न तकनीकें व्यवहार्य हैं या नहीं —

(क) $A_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.4 \\ 0.1 & 2.5 \end{bmatrix}$ (ख) $A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

4.7 तीनों उद्योगों का आगत-निर्गत आव्यूह एवं अन्तिम मांग सदिश निम्न होने पर उत्पादन सदिश निर्धारित कीजिये —

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{(करोड़ रुपये)} \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

आगत-निर्गत आव्यूह मांग सदिश

प्राथमिक आगत गुणांक $a_{01} = 0.3$, $a_{02} = 0.3$ एव $a_{03} = 0.4$ होने पर प्राथमिक आगत की वांछित मात्रा बताइये।

4.8 तकनीकी गुणांक आव्यूह निम्न होने पर

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

(क) $[I - A]^{-1}$ ज्ञात कीजिये। (ख) प्राथमिक आगत की आवश्यकता निकालिये

4.9 एक अर्थव्यवस्था केवल कोयला एवं स्पात उत्पादन करती है। दोनों वस्तुयें एक-दूसरे उद्योग में मध्यवर्ती आगत हैं। एक टन स्टील उत्पादन के लिये 0.4 टन स्पात व 0.7 टन कोयला आवश्यक है। इसी प्रकार एक टन कोयला उत्पादन के लिए 0.1 टन स्पात एवं 0.6 टन कोयला चाहिये। पूंजी आगत की आवश्यकता नहीं है। क्या आप समझते हैं कि यह उत्पादन प्रणाली व्यवहार्य है?

एक टन कोयला एवं स्पात उत्पादन के लिये क्रमशः 2 एवं 5 श्रम दिवस लगते हैं। यदि अर्थप्रणाली को 100 टन कायेला एवं 50 टन स्पात की आवश्यकता है तो दोनों वस्तुओं का सकल उत्पादन एवं श्रम की कुल आवश्यकता बताइये।

4.10 निम्न आगत-गुणांक आव्यूह का निकटतम की विधि से प्रतिलोम ज्ञात कीजिये —

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

13.5 सारांश

1. आगत-निर्गत विश्लेषण उत्पादन नियोजन की एक महत्त्वपूर्ण तकनीक है। इस विश्लेषण में आव्यूह बीजगणित का उपयोग किया जाता है।

2. आगत-निर्गत विश्लेषण हेतु आगत व निर्गत समंकों के आधार पर तकनीकी गुणांक ज्ञात किये जाते हैं। तकनीकी (या आगत) गुणांक किसी आर्थिक क्षेत्र/उद्योग में एक इकाई उत्पादन के लिये विभिन्न उद्योगों के उत्पादनों का आगत के रूप में प्रयुक्त होने का अनुपात बताते हैं।

3. तकनीकी गुणांक और अन्तिम मांग ज्ञात होने पर विभिन्न क्षेत्रों/उद्योगों के लिए वांछित उत्पादन स्तर निर्धारित किया जा सकता है। प्रत्येक क्षेत्र/उद्योग के लिए एक उत्पादन आबंटन समीकरण बनाई जाती है। जितने उद्योग या क्षेत्र होते हैं उतनी ही उत्पादन आबंटन या संतुलन समीकरणें बनती हैं। समीकरणों के इस समुच्चय को आव्यूह बीजगणित द्वारा हल करके आगत-निर्गत प्रणाली का अनन्य हल ज्ञात किया जा सकता है।

4. स्थैतिक आगत - निर्गत विश्लेषण में तकनीकी गुणांकों को स्थिर माना जाता है। स्थैतिक विश्लेषण में खुला एवं बन्द प्रतिरूप बन सकता है। खुले प्रतिरूप में दिये हुये उद्योगों/क्षेत्रों के अतिरिक्त अन्तिम मांग और प्राथमिक आगतों को अलग से शामिल किया जाता है। आव्यूह बीजगणित द्वारा स्थैतिक खुले प्रतिरूप का अनन्य हल ज्ञात किया जा सकता है।

13.6 हल और उत्तर

1.0 $[I-A]^{-1} = \frac{24}{5} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ (क) $x = \begin{bmatrix} 408 \\ 264 \end{bmatrix}$ (ख) $x = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \end{bmatrix}$

2.1 $x = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$ कुल प्राथमिक आगत = 4 + 2 + 1 = 7 (करोड़ रु.)

2.2 $x = \begin{bmatrix} 36.0 \\ 28.9 \\ 20.4 \end{bmatrix}$ $L = [7.2 \quad 8.67 \quad 6.12]$

श्रम की कुल आवश्यकता 21.99 (करोड़ रु.)

2.3 $[I-A]^{-1} = \frac{1}{0.175} \begin{bmatrix} 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.10 & 0.40 & 0.15 \\ 0.15 & 0.25 & 0.40 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 138.57 \\ 202.86 \\ 264.29 \end{bmatrix}$

2.4 $[I-A]^{-1} = \frac{1}{0.175} \begin{bmatrix} 0.42 & 0.28 & 0.21 \\ 0.43 & 0.62 & 0.34 \\ 0.16 & 0.19 & 0.33 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 492 \\ 796 \\ 373 \end{bmatrix}$

$L = [98.4 \quad 79.6 \quad 111.9]$

2.5 $x = \begin{bmatrix} 242 \\ 215 \\ 230 \end{bmatrix}$ $L =$ $\begin{array}{ccc} \text{स्पात} & \text{कोयला} & \text{रेल परिवहन} \\ [72.6 & 64.5 & 23] \end{array}$

4.1 (क) $x = \begin{bmatrix} 39.84 \\ 35.68 \\ 30.85 \end{bmatrix}$ प्राथमिक आगत= 11.952 + 10.704 + 12.34
= 34.996 ≅ 35

(ख) $x = \begin{bmatrix} 50 \\ 33.33 \\ 25 \end{bmatrix}$ प्राथमिक आगत = 15 + 9.9 + 10
= 34.9 ≅ 35

4.2 (i) $|I-A| = \begin{vmatrix} 0.5 & -4 \\ -0.02 & 0.7 \end{vmatrix} = +0.27 > 0$

(ii) मूल विकर्ण के सभी अवयव शून्य से अधिक किन्तु एक से कम हैं।

व्यवहार्यता की दोनों शर्तें पूरी होती हैं, अतः व्यवहार्य है।

4.3 तकनीकी व्यवहार्य होने के लिये आवश्यक है

(i) $|I - A| > 0$ (ii) $1 > a_{ij} \geq 0$

$$|I - A| = \begin{bmatrix} 1 - d & -4 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 - 0.5d - 0.2$$

$$0.3 - 0.5d \geq 0$$
$$-0.5d \geq -0.3$$
$$d \leq 0.6$$

d का मूल्य अधिकतम 0.6 हो सकता है।

4.4 $x = \begin{bmatrix} 173 \\ 192 \end{bmatrix}$

4.5 $x = [I - A]^{-1} y \therefore \begin{bmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

अतः (i) $4y_1 + 0y_2 + 8y_3 = 4000$ $y_1 = 0$

(ii) $0y_1 + 4y_2 + 0y_3 = 2000$ $y_2 = 500$

(iii) $0y_1 + 0y_2 + 2y_3 = 1000$ $y_3 = 500$

4.6 (क) $a_{ij} > 0$ अव्यवाहार्य

(ख) $|I - A| = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.5 \\ -.6 & 0.6 \end{vmatrix} < 0$ अव्यवहार्य

4.7 $x = \begin{bmatrix} 24.84 \\ 20.68 \\ 18.36 \end{bmatrix}$ प्राथमिक आगत की कुल मांग = रु. 21 करोड़

4.8 $[I - A]^{-1} = \dfrac{1}{0.77} \begin{bmatrix} 1.06 & 0.36 & 0.26 \\ 0.008 & 0.98 & 0.28 \\ 0.22 & 0.33 & 0.88 \end{bmatrix}$

$a_{01} = 0.5x_1$ $a_{02} = 0.4\ x_2$ $a_{03} = 0.6\ x3$

4.9 $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$ $d = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 176.5 \\ 558.8 \end{bmatrix}$

श्रम की कुल आवश्यकता = 2000 श्रम दिवस

4.10 $[I - A]^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

$$= \begin{bmatrix} 1.111 & 0.411 \\ 0 & 1.248 \end{bmatrix}$$

13.7 शब्दावली

स्थैतिक	Static
आगत/आदा	Input
निर्गत/प्रदा	Output
तकनीकी गुणांक	Technical Coefficient
अर्थमिति	Econometrics
प्रक्रमन	Programming
प्रतिरूप	Model
समरूपता	Homogeneity
आनुपातिकता	Proportionality
एक घातीय	Linear
तकनीकी आव्यूह (मैट्रिक्स)	Technological Matix
परिकलन	Calculation
अन्तिम मांग	Final demand
अवयव	Elements
खुला प्रतिरूप	Open model
मध्यवर्ती वस्तुएँ	Intermediate goods
मांग की संरचना	Demand structure
प्रतिबन्ध	Constraints
आगत गुणांक	Input coefficient
प्रतिलोम	Inverse
सन्निकटन	Approximation

13.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Chiaing, A. C. Fundamental methods of Mathematical Economics, 1984, Chapter, V

Weber, J.E. Mathematical Analysis — Business and Economic Applications, 1982, Chapter 8.3

Mehta and Madnani, Mathematics for Economists, 1988, Chapter 16.

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका — अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग 1989, अध्याय 12

अग्रवाल एवं चौधरी, अर्थमिति एवं गणितीय अर्थशास्त्र 1978 अध्याय 14.

Allen, R.G.D. Methematical Economics

इकाई — 14

रैखिक प्रोग्रामिंग
(Linear Programming) : आलेख विधि

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य (Objectives)

इस अध्याय के मुख्य उद्देश्य हैं :-

(I) रैखिक प्रोग्रामिंग (Linear Programming) की समस्या से अवगत कराना

(II) रैखिक प्रोग्रामिंग के कुछ उदाहरण प्रस्तुत करना,

(III) रैखिक प्रोग्रामिंग की मुख्य विशेषताओं को बताना, एवं

(IV) रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्याओं को रेखाचित्र की सहायता से हल करना।

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रोग्रामिंग मुख्यतः एक गणितीय विधि है। इसका प्रयोग कुछ विशेष प्रकार की समस्याओं के समाधान के लिए किया जाता है। ये समस्याएं कुछ दी हुई परिस्थितियों में किसी चर (Variable) विशेष की आदर्शतम स्थिति (Optimum position) की प्राप्ति से सम्बन्धित होती है। आदर्शतम स्थिति के दो रूप हो सकते हैं :-

(1) अधिकतम (Maximum) मान को प्राप्त करना।

(2) न्यूनतम (Minimum) मान को प्राप्त करना।

प्रोग्रामिंग का प्रयोग उन सभी समस्याओं के समाधान के लिए किया जाता है जहां सीमित साधन के बंटवारे के प्रश्न (Problem of resource allocation) होते हैं। साथ ही, इस प्रकार की समस्याओं के साथ कुछ सीमाएं या बन्धन (Constraints) होते हैं जिनकी सन्तुष्टि करने के पश्चात् ही आदर्शतम स्थिति की प्राप्ति की जाती है।

एक उदाहरण – अर्थशास्त्र में आप फर्म के सिद्धान्त में, "अधिकतम लाभ" (Profit maximization) के सम्बन्ध में पढ़ते होंगे। अधिकतम लाभ प्राप्ति की समस्या मुख्यतः दो प्रकार की होती है : (अ) जब उत्पादक किसी प्रकार की सीमा या बन्धन से बँधे हुए नहीं होते हैं, और (ब) जब उत्पादकों को कुछ सीमाओं या बन्धनों का सामना करते हुए अपने उद्देश्य की पूर्ति करनी पड़ती है, जैसे- मशीन की कुल उत्पादन-क्षमता, कुल भंडार-गृह की क्षमता, कुल उपलब्ध श्रम-समय इत्यादि।

रैखिक प्रोग्रामिंग सामान्यतः (ब) श्रेणी की समस्याओं के समाधान से जड़ित होते हैं।

कुछ और उदाहरण :-

(I) **आहार-समस्या** :- किसी मनुष्य को अपना स्वास्थ्य बनाए रखने के लिए प्रतिदिन कुछ न्यूनतम पौष्टिक तत्व की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए मान लें कि उसे तीन प्रकार के पौष्टिक तत्व, "कैल्सियम", "प्रोटीन" एवं "कैलोरी" की आवश्यकता है। साथ ही, मान लें कि उसके आहार में केवल दो ही खाद्यान्न सम्मिलित

हैं जिनके मूल्य एवं निहित पौष्टिक तत्व भी दिए गए हैं। ऐसी **स्थिति** में व्यक्ति के समक्ष न्यूनतम पौष्टिक तत्व की आवश्यकताओं **की पूर्ति** करते हुए दो खाद्यान्न वस्तुओं के आदर्शतम मात्रा को **निर्धारित** करने की समस्या आती है। यहां आदर्शतम मात्रा से तात्पर्य वे मात्राएँ होंगी जिनसे कुल लागत की मात्रा न्यूनतम हो। इस प्रकार यह एक रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या बन जाती है।

(II) **यातायात-पथ के चयन की समस्या :-** मान लें कि किसी फर्म के पास कई एक उत्पादन इकाई (Plant) हैं और उत्पादन प्रक्रिया के सिलसिले में वस्तुओं को एक स्थान से दूसरे स्थान तक पहुंचाने की आवश्यकता पड़ती है। ऐसी स्थिति में आवागमन- प्रक्रिया का योजनाबद्ध रूप से चयन करने पर काफी बचत की सम्भावना रहती है। अगर फर्म के पास यातायात के अपने साधन न हों तो यातायात की विभिन्न दरों को ध्यान में रखते हुए यातायात-साधन के मालिक को न्यूनतम भुगतान करने की समस्या सामने आती है। अतः यह भी प्रोग्रामिंग की समस्या बन जाती है।

14.2 रैखिक प्रोग्रामिंग की मुख्य विशेषताएं एवं समस्या का गणितीय रूप

14.2.1 रैखिक प्रोग्रामिंग की विशेषताएं

14.1 में दिए गए उदाहरणों से कुछ सामान्य बातें स्पष्ट होती हैं जो कि इस प्रकार हैं :-

(I) प्रत्येक स्थिति में किसी चुने हुए चर का सर्वोत्तम मान की प्राप्ति ही रैखिक प्रोग्रामिंग का मुख्य ध्येय होता है, चाहे यह कुल लाभ हो, कुल लागत हो या कुल भुगतान हो।

(II) सभी समस्याओं के साथ कुछ न कुछ शर्त या सीमाओं **(Constraints)** का होना आवश्यक है। इन सीमाओं की सन्तुष्टि होने पर ही सर्वोत्तम मान की प्राप्ति को स्वीकारा जा सकता है।

(III) सामान्यतः ये सीमाएं "न्यूनतम आवश्यकता" **(Minimum requirements)** अथवा अधिकतम उपलब्ध क्षमता **(Maximum available capacity)** के रूप में व्यक्त की जाती है। इन्हें पार्श-स्थिति **(Side Conditions)** भी कहते हैं। इन पार्श-स्थितियों की मुख्य विशेषता यह होती है कि ये यह नहीं कहते कि किसी चर का मान (उदाहरणार्थ) 100 के बराबर ही होना है, बल्कि केवल इतना ही कहते हैं कि इसका मान 100 से कम नहीं होना है। इसी कारण इन्हें समीकरण के स्थान पर "असमिकाओं" के रूप में व्यक्त की जाती है।

(IV) रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या में objective फलन (जिसका मान सर्वोत्तम करना होता है) एवं सभी असमिकाएं रैखिक फलन (Linear function) के रूप में व्यक्त किए जाते हैं। इसका तात्पर्य यह है कि इन फलनों में सभी चर किसी स्थिरांक (Constant) के गुणनफल होते हैं तथा वे आपस में जुड़े हुए होते हैं। उदाहरणार्थ,

$$Q = 2W + 3Y$$

$$\text{or, } 100 \geq 0.5 + 2Y;$$

यह दोनों ही रैखिक फलन हैं। इन्हें रेखाचित्र में प्रदर्शित करने पर जो आलेख प्राप्त होंगे वे सरल रेखा के रूप में प्रतीत होंगे। यही कारण है कि इनसे संबंधित समस्या को "रैखिक प्रोग्रामिंग" की समस्या कहा जाता है।

14.2.2 रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या-बीजगणितीय रूप

आप एक व्यावहारिक उदाहरण लें। मान लें कि एक उत्पादक, w, x, y और z इन चार वस्तुओं का उत्पादन करता है। इन वस्तुओं की विभिन्न मात्राएं जो कि उत्पादक वस्तुतः उत्पादन करता है, क्रमशः w, x, y और z हैं। अगर इनसे प्राप्त लाभ प्रति इकाई क्रमशः 2, 1, 4 और 3 रुपए हों, तो हम कुल लाभ की मात्रा को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त कर सकते हैं:-

$$\Pi = 2w + x + 4y + 3z;$$

यहां, Π कुल लाभ का द्योतक है।

अब मान लें कि उत्पादक के पास मशीन-घंटे के रूप में कुल उत्पादन-क्षमता 2000 घंटे एवं कुल भंडारन क्षमता (Warehousing capacity) 5000 वर्ग-फुट स्थान उपलब्ध हैं। साथ ही यह भी मान लें कि w वस्तु की प्रति इकाई के उत्पादन के लिए 1/2 घंटा मशीन-समय तथा 5 वर्ग-फुट भंडार-स्थान की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार, x वस्तु की प्रति इकाई के उत्पादन के लिए 1 घंटा मशीन-समय एवं 2 वर्ग-फुट भंडार-स्थान, Y वस्तु की प्रति इकाई के लिए 1/4 घंटा मशीन समय एवं 10 वर्गफुट भंडार-स्थान और z की प्रति इकाई के लिए 2 घंटे मशीन समय एवं 6 वर्ग-फुट भंडार स्थान की आवश्यकता होती है।

अगर उत्पादक का मुख्य उद्देश्य इन चारों वस्तुओं के उत्पादन से प्राप्त कुल लाभ को अधिकतम करना हो, बशर्ते कि दी हुई सीमाओं (उत्पादन-क्षमता एवं भंडारन क्षमता) का उल्लंघन न हो, तो हम इस सम्पूर्ण समस्या को निम्नलिखित रूप से व्यक्त करेंगे :-

अधिकतम $\Pi = 2w + x + 4y + 3z$.............(1)

सीमा-बंधन के साथ,

(i) $0.5w + 1x + 0.25y + 2z \leq$ 2000..........(2)

(ii) $5w + 2x + 10y + 6z \leq$ 5000.............(3)

$w \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$........(4)

समीकरण (1) को Objective फलन कहेंगे क्योंकि इसके मान को (यहां) अधिकतम करना उत्पादक का उद्देश्य है। (2) और (3) असमिकाओं को संरचनात्मक (Structural) (या क्षमता-सीमाएं) (Capacity constraints) कहे जाते हैं तथा (4) को अ-ऋणात्मक शर्त्त (non-negative conditions) कहा जाता है। इनमें (2) मशीन समय सम्बन्धी तथा (3) भंडार-क्षमता सम्बन्धी असमिकाएं हैं।

"≤" चिन्ह इस बात का द्योतक है कि क्षमता-सम्बन्धित सीमाओं का अतिक्रमण न हो। अंर्थात्, उत्पादन-प्रक्रिया में सम्पूर्ण क्षमता का पूर्ण प्रयोग हो अथवा न भी हो। (4) इस बात को बताता है कि उत्पादित वस्तुओं की मात्रा ऋणात्मक रूप न लें। यह शर्त्त यद्यपि कुछ हास्यास्पद लगता है तथा वास्तविक गणना (calculation) की दृष्टिकोण से ऐसे शर्त्तों का स्पष्टीकरण आवश्यक होता है।

14.2.3 रेखिक प्रोग्रामिंग के ज्यामितीय रूप एवं समस्या का हल

चूंकि ज्यामितीय दृष्टिकोण से आप अधिक से अधिक दो चरों की मात्रा को रेखाचित्र के दो दिशाओं में प्रदर्शित कर सकते हैं, अतः ऐसा एक उदाहरण लें जिसमें दो स्वतंत्र चर हों। जैसे,

$\Pi = 3x + 2y$................(i) -objective फलन

$x + y \leq 5$.............(2)

$2x + 3y \leq 12$.........(3) सीमाएं

$x, y \geq o$............(4) अ-ऋणात्मक शर्त्त

अब आप एक आलेख-पत्र (Graph Paper) लें और सर्वप्रथम असमिकाओं का आलेख खींचें(रेखाचित्र- 14.1 को देखें)। इसके लिए आप असमिकाओं को समीकरण में बदलें और इनके आलेख खींचे।

उदाहरणार्थ,

$$x + y = 5$$

समीकरण के आलेख के लिए,

$$x = 5-y,$$

अथवा, $$Y = 5-x$$

में Y के विभिन्न मान के लिए x के मान, अथवा x के विभिन्न मान के लिए Y के I मान को आलेख-पत्र में दर्शाएं। इस प्रकार सभी बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा ही X + Y = 5 की रेखा होगी। अब चूंकि आपको $X + Y \leq 5$ को दिखाना है, अतः X + Y = 5 की रेखा से नीचे के क्षेत्र का बोध होगा।

इसी प्रकार, 2x + 3y = 12 समीकरण के लिए भी उपरोक्त प्रक्रिया से आलेख खींचें। इस प्रकार, $2x + 3y \leq 12$ से 2x + 3y = 12 की रेखा से नीचे के क्षेत्र का बोध होगा। परन्तु, दोनों असमिकाओं को एक साथ सन्तुष्ट करे ऐसा क्षेत्र दोनों क्षेत्र के सामान्य क्षेत्र होगा (रेखाचित्र-। में छायांकित अंश)। इस क्षेत्र को सम्भाव्य क्षेत्र (Feasible region) कहेंगे। अगर आपकी समस्या में दो से अधिक असमिकाएं हों तो सभी के आलेख से प्राप्त सामान्य क्षेत्र "सम्भाव्य क्षेत्र" होगा। सम्भाव्य-क्षेत्र आपको यह संकेत देता है कि objective फलन इसी क्षेत्र में स्थित किसी भी बिन्दु पर हो सकता है- लेकिन इसके बाहर नहीं हो सकता है।

अब आप इस समस्या का मुख्य भाग- "अधिकतम लाभ" की मात्रा का निरूपण के लिए Objective फलन का भी आलेख खींचें। इसके लिए आप लाभ के समीकरण,

$$\Pi = 3x + 2y \quad \text{को,}$$

$$2y = \Pi - 3x$$

अथवा, $$Y = \Pi/2 - 3/2\ x \ldots\ldots\ldots(5)$$

के रूप में बदलें। अब समीकरण (5) को देखने पर पता चलेगा कि यह वस्तुतः एक रैखिक समीकरण है जिसका ढाल (Slop), -3/2 तथा स्थिरांक (Constant) या intercept Π/2 है। चूँकि इसका ढाल ऋणात्मक है अतः इसकी रेखाएं बांएं से दाहिनी की ओर झुकेगीं। साथ ही, Π के विभिन्न मान के लिए ये सरल रेखाएं एक-दूसरे के समानान्तर होंगी। अर्थात् Π के मान में वृद्धि करने पर प्रत्येक सरल-रेखा समानान्तर रूप से नीचे से ऊपर की ओर जाएगी। इन सरल रेखाओं को सम-लाभ रेखाएं (iso-profit curves) कहेंगे। नीचे के उदाहरण को देखें :-

समीकरण (5) : Y = Π/2 (-3/2)x

जब Π = 4	जब Π = 6		जब Π = 8		
Y	X	Y	X	Y	X
2	0	3	0	4	0
1/2	1	1½	1	2½	1
0	4/3	0	2	0	8/3

अब इन सम-लाभ रेखाओं के परिवार में से उस रेखा का चयन करें जो सम्भाव्य क्षेत्र के अन्तर्गत रहते हुए सर्वोच्च हो। इसके लिए उस सम-लाभ रेखा को निश्चित करें जो सम्भाव्य-क्षेत्र की कोणों की बिन्दु (corner point) से स्पर्श करें। इस प्रकार सम-लाभ रेखा से व्यक्त की गई लाभ की मात्रा ही अधिकतम लाभ की मात्रा होगी तथा उस बिन्दु को आदर्शतम बिन्दु और उस पर x एवं y की मात्राओं को आदर्शतम मात्राएं कहेंगे।

इस आदर्शतम स्थिति में वास्तविक लाभ की मात्रा को ज्ञात करने की वैकल्पिक विधि यह है कि x और y की आदर्शतम मात्राओं को लाभ-समीकरण में रखें।

उपरोक्त उदाहरण के लिए x और y की आदर्शतम मात्राएं क्रमशः 3 और 2 होंगी। अतः,

$\Pi = 3x + 2y$ में इनके मान रखने पर,

$= 3x3 + 2x2$

$= 9 + 4$

$= 13$ रु० होगा।

14.2.4 समस्या का एक और रूप

14.1 में आप "आदर्शतम मान" के दो रूप के बारे में जान चुके हैं:

अधिकतम अथवा न्यूनतम मान की प्राप्ति। न्यूनतम मान की प्राप्ति के संबंध में रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या को कुछ अलग रूप से व्यक्त करेंगे। जैसे।

न्यूनतम	$C = q_1 + 0.5q_2$	------------(1)
सीमाओं के साथ,	$q_1 + 2q_2 \geq 5$	------------(2)
	$3q_1 + 2q_2 \geq 9$	------------(3)
	$q_1, \ q_2, \ \geq 0$	------------(4)

यहां, C = कुल लागत की मात्रा, एवं q_1 और q_2 दो वस्तुओं की मात्राएं हैं।

समीकरण (1) objective फलन तथा (2) और (3) ऐसी असमिकाएं हैं जो उपयोग की न्यूनतम मात्राओं को व्यक्त करती हैं। ऐसी स्थिति में असमिकाओं के आलेख, समीकरण की रेखाओं से ऊपर के क्षेत्र होंगे तथा सभी रेखाओं को सन्तुष्ट करता हुआ क्षेत्र सम्भाव्य क्षेत्र होगा (रेखाचित्र- 2 देखें)। अब objective फलन के न्यूनतम मान को निश्चित करने के लिए सम-लागत रेखाओं (iso-cost curves) के आलेख खींचेंगे(पूर्ववत् विधि से)। इन रेखाओं में से उस रेखा को चुनें जो सम्भाव्य-क्षेत्र के किसी किनारे को स्पर्श करे।
वस्तुओं के इन संयोगों को लागत समीकरणों में रखने पर,

$$\begin{aligned} C &= 1.8 + (0.5 \times 1.6) \\ &= 1.8 + 0.8 \\ &= 2.6 \end{aligned}$$

14.2.5 बोध प्रश्न

निम्नलिखित सम .:ओं को रेखाचित्र के सहारे हल करें

(I) इसके अधिकतम मान निकालें :

$$\Pi = 2x_1 + 5x_2$$

जबकि सीमाएं,

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

इशारा $x_1 \neq 4$, $x_2 = 3$ के आलेख OY और OX के समानान्त रेखाएं खींचे, फिर $x_1 + x_2 = 6$ भी खींचें।

(II) इसके न्यूनतम मान निकालें :-

$$C = 6z_1 + 4z_2$$

सीमाएं,

$$z_1 + 2z_2 \geq 3$$

$$z_1 + 4z_2 \geq 4$$

$$3z_1 + z_2 \geq 6$$

$$z_1, z_2 \geq 0$$

(III) इसके अधिकतम मान निकालें :-

$$R = 3x + 7y$$

सीमाएं,

$$2x + 2y \leq 8$$

$$3x + 2y \leq 10$$

$$x , y \geq 0$$

(IV) इसके अधिकतम मान निकालें :

$$z = 4q_1 + 3q_1$$

सीमाएं,

$$q_1 + 3q_2 \leq 9$$

$$2q_1 + q_2 \leq 7$$

$$q_1 + 1.8q_2 \leq 6$$

$$q_1 , q_2 \geq 0$$

14.3 सारांश

(I) प्रोग्रामिंग एक प्रकार की गणितीय विधि है जिसकी सहायता से दी हुई परिस्थिति में किसी चर के आदर्शतम मान प्राप्त किया जाता है।

(II) प्रोग्रामिंग की सरल विधि को रैखिक प्रोग्रामिंग कहते हैं क्योंकि इसमें चरों के बीच सम्बन्ध रैखिक रूप में व्यक्त किए जाते हैं।

(III) रैखिक प्रोग्रामिंग के तीन मुख्य अंश होते हैं :

(अ) objective फलन, जिसका आदर्शतम मान प्राप्त करना होता है,

(ब) सीमाओं की असमिकाएं एवं (स) अ-ऋणात्मक शर्तें।

(IV) रैखिक प्रोग्रामिंग की समस्या की प्रमुख विशेषता यह है कि इसमें दी हुई सीमाओं का उल्लंघन न करते हुए objective फलन का आदर्शतम मान प्राप्त करने की आवश्यकता होती है।

(V) रेखाचित्र के माध्यम से इस समस्या का हल करने के लिए पहले दी हुई असमिकाओं का आलेख खींचते हैं। फिर सभी असमिकाओं

को संतुष्ट करने वाले क्षेत्र को निश्चित करते हैं, इसे सम्भाव्य क्षेत्र कहते हैं।

(VI) अब objective फलन की रेखाओं का आलेख खींचते हैं जो एक दूसरे के समानान्तर रेखाएं होती हैं।

(VII) अन्ततः इन रेखाओं में से केवल उसी रेखा का चयन करते हैं जो सम्भाव्य क्षेत्र के कोण को स्पर्श करती है। इस प्रकार इस रेखा से प्राप्त objective फलन का मान ही आदर्शतम मान होता है।

14.4 अभ्यासों के उत्तर

संलग्न रेखाचित्र संख्या 14.3, 14.4, 14.5 एवं 14.6 देखें।

1. $\Pi = 2x_1 + 5x_2$

or $2x_1 = \Pi - 5x_2$

$\therefore x_1 = \Pi/2 - (5/2)x_2 = (1/2)\Pi - (5/2)x_2$

Alternatively $5x_2 = \Pi - 2x_1$

$\therefore x_2 = (1/5)\Pi - (2/5)x_1$

अधिकतम मान $\Pi = 2x3+5x3 = 6+15 = 21$

2. $C = 6z_1 + 4z_2$

or $4z_2 = C-6z_1$

$z_2 = (1/4)\ c - (6/4)z_1$

न्यूनतम मान $C = 6z_1 + 4z_2$

$6x1.7+4x0.6 = 12.6$

3. $R = 2x+7y$

or $7y = R - 2x$ $y = (1/7)\ R - (2/7)x$

4, $Z = 4q_1+3q_2$ or $3q_2 = Z - 4q_1$

$q_2 = (1/3)z - (4/3)q_1$

14.5 शब्दावली

आदर्शतम मान – किसी भी चर का अधिकतम या न्यूनतम मान को आदर्शतम मान कहते हैं।

Objective फलन – जिस फलन के मान को आदर्शतम (optimum) करना होता है, उसे objective फलन कहते हैं।

सीमाएं (Constraints) - वे न्यूनतम आवश्यकताएं अथवा अधिकतम उपलब्ध क्षमता जिनकी पूर्ति करना आदर्शतम स्थिति की प्राप्ति की प्रक्रिया में अनिवार्य है।

सम्भाव्य क्षेत्र - (Feasible Region) - दी हुई सीमाओं को एक साथ सन्तुष्ट करने वाला क्षेत्र जिसके अन्तर्गत objective फलन के आदर्शतम मान ढूँढ़ा जा सकता है।

सम-लाभ रेखा (Iso-profit curve) - दो वस्तुओं के विभिन्न संयोग जिनसे समान लाभ की मात्रा प्राप्त होती है।

14.6 कुछ उपयोगी पुस्तकें

(1) W.J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, 2nd Ed. Prentice Hall, 1996.

(2) A.C. Chiaing "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 2nd Ed., Mc. Graw Hill, 1974

(3) R. Dorfman, P.A. Samuelson and R.M. Solow "Linear Programming and Economic Analysis", MC Graw Hill, 1956.